серия ШКОЛЬНЫЙ КОНСПЕКТ

Ершова А.П.
Голобородько В.В.
Крижановский А.Ф.

$a^2+b^2=c^2$

ТЕТРАДЬ-КОНСПЕКТ ПО ГЕОМЕТРИИ

8

по учебнику
Атанасяна Л.С.

А.П. Ершова, В.В. Голобородько,
А.Ф. Крижановский

ТЕТРАДЬ-КОНСПЕКТ ПО ГЕОМЕТРИИ

(*по учебнику Л.С. Атанасяна и др.*)

учени____ 8—___ класса

____

____

____

____

Москва
ИЛЕКСА
2015

Рецензенты:

И.Л. Соловейчик — главный редактор приложения «Математика» к газете «Первое сентября», г. Москва;

В.А. Лысенко — учитель-методист Авторской школы Бойко, г. Харьков.

Ершова А.П., Голобородько В.В., Крижановский А.Ф.

Тетрадь-конспект по геометрии для 8 класса.— М.: ИЛЕКСА, 2015.— 128 с.

ISBN 978-5-89237-163-6

Тетрадь-конспект содержит все основные теоретические сведения — **определения, аксиомы, теоремы и следствия** из них — курса геометрии 8 класса (по учебнику Л.С. Атанасяна и др.). **Опорные задачи** содержат важные свойства геометрических фигур, не выраженные в теоремах. **Типовые задачи** описывают простейшие и более сложные геометрические ситуации, наиболее часто встречающиеся в тематических проверочных работах. **Полезные задачи** описывают дополнительные свойства изучаемых геометрических фигур. Ко всему материалу приведены чертежи, после теорем и задач оставлено место для самостоятельного заполнения учащимися. К отдельным теоремам и задачам приведены доказательства, решения или указания к решению.

Тетрадь-конспект поможет **существенно сэкономить время урока** учителям и школьникам.

ISBN 978-5-89237-163-6

Дорогие друзья!

Если вы уже купили эту тетрадь-конспект, то у вас наверняка есть свой собственный взгляд на ее эффективное использование. Если же вы раздумываете – покупать или не покупать, пригодится или будет лежать на полке, – то мы можем вкратце, учитывая собственный опыт работы по учебнику с такими тетрадями, рассказать о той несомненной пользе, которую они приносят на практике.

1. В этой тетради **уже проделана вся рутинная работа** по записи формулировок **определений, аксиом, теорем** и построению чертежей – вам только остается заполнить необходимые доказательства и решения, причем не обязательно в том виде, в котором они приведены в учебнике.
2. Формулировки **опорных задач**, которые, как правило, под диктовку записываются в обычную рабочую тетрадь во время урока или, в худшем случае, выискиваются в учебнике, уже выбраны из учебника и лучших книг по геометрии, и вам только остается грамотно доказать эти важные свойства геометрических фигур и применять их на практике. Многие из опорных задач в других учебниках названы теоремами, что говорит в пользу их важности. Каждая теорема и опорная задача имеет название, что облегчит вам ссылку на нее в решении других задач.
3. В этой тетради много ***типовых задач***, то есть задач, подобные которым часто встречаются на самостоятельных, контрольных и тематических работах. Их решения желательно оформить **как образец** с учетом всех действующих требований – это облегчит подготовку ко всем письменным работам, в том числе и к экзаменам.
4. Для **более глубокого изучения** геометрии предназначены ***полезные задачи***, в которых описаны дополнительные свойства изучаемых фигур или представлены оригинальные геометрические идеи. Эти задачи решаются в тетрадях для практических работ. Много интересного дополнительного материала вы найдете и в главе «Приложение».

И, наконец, эта тетрадь создавалась, в первую очередь, для того, чтобы
существенно сэкономить время
урока и ваше личное время.

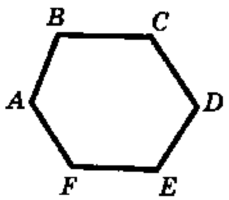
Желаем вам успехов!

Будем благодарны за ваши замечания и доброжелательные отзывы, которые вы можете разместить на нашем сайте www.axiom.com.ua

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Многоугольники

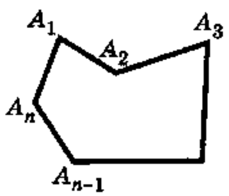
Определение многоугольника



Многоугольником называется фигура, составленная из отрезков AB, BC, CD, ..., EF, FA **(сторон многоугольника)** так, что смежные отрезки (т.е. AB и BC, BC и CD, ..., FA и AB) не лежат на одной прямой, а несмежные отрезки не имеют общих точек.

Точки A, B, C, ..., F – **вершины многоугольника.**

Обозначение. Многоугольник обозначается последовательным перечислением его вершин: $ABCDEF$.

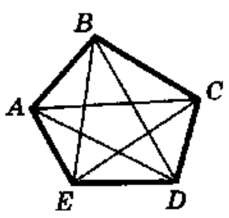


Многоугольник с n вершинами ($n \geq 3$) часто называют **n-угольником.**

Очевидно, что он имеет n сторон.

$A_1A_2A_3...A_n$ – n-угольник.

Элементы многоугольника



Две вершины многоугольника, принадлежащие одной стороне, называются **соседними.**

A и B, B и C, C и D, D и E, E и A – соседние вершины.

Две стороны многоугольника, имеющие общую вершину, называются **смежными (соседними).**

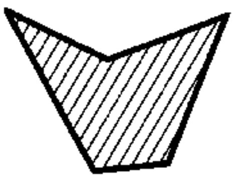
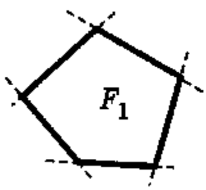
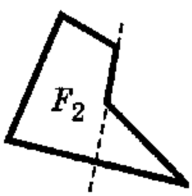
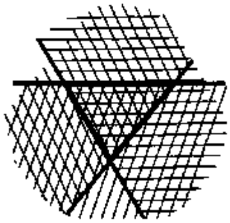
AB и BC, BC и CD, CD и DE, DE и EA, EA и AB – смежные стороны.

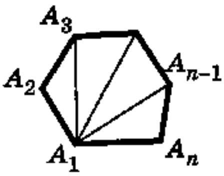
Отрезок, соединяющий любые две несоседние вершины многоугольника, называется **диагональю многоугольника.**

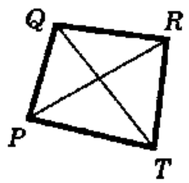
AC, BD, CE, DA, EB – диагонали многоугольника.

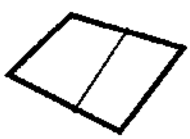
Периметром многоугольника называется сумма длин всех его сторон:

$$P_{ABCDE} = AB + BC + CD + DE + EA.$$

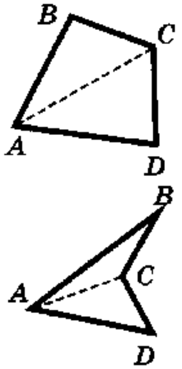
Полезная задача	*Докажите, что в любом n-угольнике* $\dfrac{n\cdot(n-3)}{2}$ *диагоналей.*
Определение внутренней и внешней области многоугольника 	Многоугольник разделяет плоскость на две части, одна из которых (конечная) называется **внутренней**, а другая – **внешней областью многоугольника.** ***Замечание.*** Фигуру, состоящую из многоугольника и его внутренней области, также называют многоугольником.
Определение выпуклого многоугольника   	Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины. Многоугольник F_1 – выпуклый, многоугольник F_2 – невыпуклый. ***Замечание.*** Внутренней областью выпуклого многоугольника является общая часть полуплоскостей, которые ограничены прямыми, проходящими через его соседние вершины (при этом сам многоугольник лежит в этой общей части).

<u>Опорная задача</u> ***(о сумме углов выпуклого n-угольника)***  	**Сумма углов выпуклого n-угольника равна** $$(n-2)\cdot 180°.$$ *Доказательство.*
<u>Следствие</u>	**Любой угол выпуклого многоугольника меньше 180°.**
Типовая задача	***Найдите углы пятиугольника, если каждый из них, начиная со второго, больше предыдущего на 10°.*** *Решение.* *Ответ*: 88°, 98°, 108°, 118°, 128°.
Определение внешнего угла выпуклого многоугольника  	**Внешним углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, смежный с внутренним углом многоугольника при этой вершине.**

<table>
<tr><td>Полезная задача</td><td>Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, при любом $n \geq 3$ равна 360°. Докажите.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Четырехугольник</td></tr>
<tr><td>Элементы четырехугольника

</td><td>P и Q, Q и R, R и T, T и P – соседние (смежные) вершины;
P и R, Q и T – противоположные (противолежащие) вершины;
PQ и QR, QR и RT, RT и TP, TP и PQ – соседние (смежные) стороны;
PQ и RT, QR и PT – противоположные (противолежащие) стороны;
PR, QT – диагонали;
$P_{PQRT} = PQ+QR+RT+TP$ – периметр.</td></tr>
<tr><td>Полезная задача (о выпуклых и невыпуклых четырехугольниках)


</td><td>Докажите, что:
1) в выпуклом четырехугольнике диагонали пересекаются, а в невыпуклом – не пересекаются;
2) любая диагональ выпуклого четырехугольника делит его на два треугольника; одна из диагоналей невыпуклого четырехугольника делит его на два треугольника;
3) любой отрезок с концами на сторонах выпуклого четырехугольника лежит во внутренней области этого четырехугольника.</td></tr>
<tr><td>Полезная задача</td><td>Докажите, что сумма диагоналей четырехугольника меньше его периметра, но больше полупериметра.</td></tr>
</table>

Опорная задача
(о сумме углов четырехугольника)

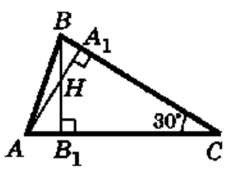


Сумма углов любого четырехугольника равна 360°.

Доказательство.

Замечание. **Очевидно, что утверждение задачи для выпуклых четырехугольников следует и из формулы $(n-2)\cdot 180°$ при $n = 4$.**

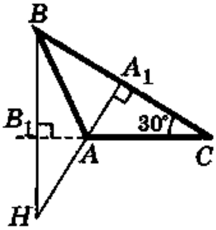
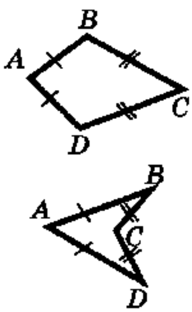
Типовая задача



В треугольнике ABC AA_1 и BB_1 – высоты, H – точка пересечения прямых AA_1 и BB_1. Найдите $\angle A_1HB_1$, если $\angle ACB = 30°$.

Решение.

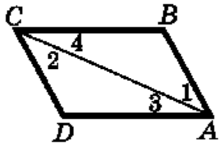
1–ый случай.

	*2-ой случай.* *Ответ:* или .
Определение дельтоида 	Четырехугольник $ABCD$ называется **дельтоидом,** если две его смежные стороны равны между собой и две другие стороны равны между собой, т. е. $AB = AD$, $CB = CD$.
Полезная задача	*Докажите, что прямые, содержащие диагонали дельтоида, взаимно перпендикулярны.*

Параллелограмм

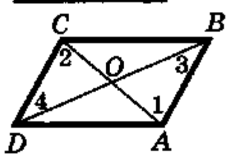
Определение параллелограмма 	**Параллелограммом** называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (т.е. лежат на параллельных прямых).
Полезная задача (свойство выпуклости параллелограмма)	*Докажите, что параллелограмм является выпуклым четырехугольником, и его диагонали пересекаются.*

Теорема
(*свойства сторон и углов параллелограмма*)



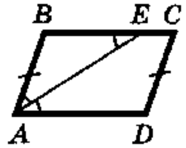
1. **Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.**
2. **В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.**
3. **В параллелограмме сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°.**

Доказательство.



4. **Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.**

Доказательство.

Типовая задача 	***Биссектриса угла параллелограмма делит противоположную этому углу сторону на отрезки 5 см и 15 см. Найдите периметр параллелограмма.*** *Решение.* ***Пусть AE – биссектриса угла BAD данного параллелограмма ABCD.*** 1. ***Пусть BE=15 см, EC=5 см.*** 2. ***Пусть BE=5 см, EC=15 см.*** ***Ответ:*** ***или*** .
Теорема ***(признаки параллелограмма)*** 	**1. Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм.** *Доказательство.*

2. **Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм.**

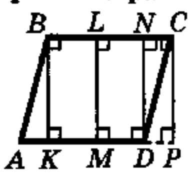
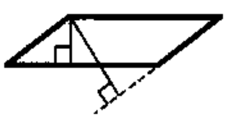
Доказательство.

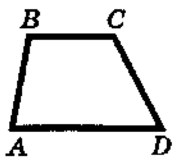
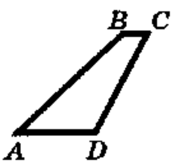
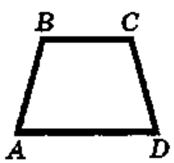
3. **Если в четырехугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.**

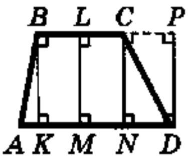
Доказательство.

4. **Если в четырехугольнике противоположные углы попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм.**

Доказательство.

Типовая задача	*Две стороны четырехугольника равны 10 см и 15 см, а сумма углов, прилежащих к каждой из них, равна 180°. Найдите периметр четырехугольника.* *Решение.*
Полезная задача	*Докажите, что биссектрисы противоположных углов параллелограмма параллельны или совпадают, а биссектрисы соседних углов взаимно перпендикулярны.*
Определение высоты параллелограмма 	**Высотой параллелограмма** называется перпендикуляр, проведенный из любой точки одной стороны к прямой, содержащей противоположную сторону. BK, LM, ND, CP – высоты параллелограмма.
Типовая задача 	*Стороны параллелограмма равны 10 см и 20 см, а угол между его высотами, проведенными из одной вершины, равен 30°. Найдите сумму высот параллелограмма.* *Решение.* *Ответ*: 15 см.

Полезная задача (об угле между высотами параллелограмма)	***Докажите, что угол между высотами параллелограмма, проведенными из одной вершины, равен углу параллелограмма при соседней вершине.***
Полезная задача	***Докажите, что биссектриса угла параллелограмма делит пополам угол между высотами, проведенными из вершины этого угла.***
	Трапеция
Определение трапеции  	**Трапецией** называется четырехугольник, у которого две стороны (**основания трапеции**) параллельны, а две другие (**боковые стороны**) не параллельны. ***Замечание.*** Очевидно, что одно из оснований трапеции больше другого.
<u>Опорная задача</u> ***(свойство углов трапеции)***  $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180°$	**Сумма углов трапеции, прилежащих к одной боковой стороне, равна 180°.** *Доказательство.*

Полезная задача	*Докажите, что трапеция является выпуклым четырехугольником, и ее диагонали пересекаются.*
Определение высоты трапеции 	**Высотой трапеции** называется перпендикуляр, проведенный из любой точки одного из оснований к прямой, содержащей другое основание. ***Замечание.*** Все высоты трапеции равны как расстояния между параллельными прямыми, содержащими ее основания.
Определение прямоугольной трапеции 	Трапеция называется **прямоугольной**, если у нее есть прямой угол. ***Замечание.*** Очевидно, что в прямоугольной трапеции ровно два угла, прилежащие к меньшей боковой стороне, – прямые.
Типовая задача	***В прямоугольной трапеции большая боковая сторона в два раза больше меньшей. Найдите углы трапеции.*** *Решение.* *Ответ*: 90°, 90°, 30°, 150°.
Равнобедренная трапеция	
Определение равнобедренной трапеции 	Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется **равнобедренной (равнобокой, равнобочной).**

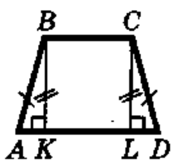
Теорема
(свойства равнобедренной трапеции)

1. **В равнобедренной трапеции углы при основании равны.**

Доказательство.

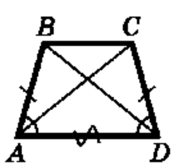
1-ый способ.

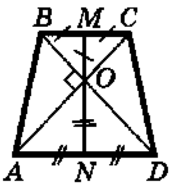
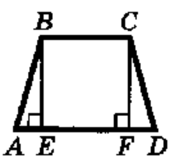
2-ой способ.



2. **В равнобедренной трапеции диагонали равны.**
3. **В равнобедренной трапеции диагонали образуют с основанием равные углы.**

Доказательство.



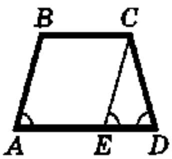
Типовая задача	***Меньшее основание равнобедренной трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна к боковой стороне. Найдите углы трапеции.*** *Решение.*
Опорная задача **(*о высоте равнобедренной трапеции с перпендикулярными диагоналями*)** 	**В равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, высота равна полусумме оснований.** *Доказательство.* Пусть $ABCD$ – данная равнобедренная трапеция, $AD \parallel BC$, $AC \perp BD$. Пусть O – точка пересечения диагоналей. Проведем через точку O высоту трапеции MN. Т.к. диагонали равнобокой трапеции образуют с основанием равные углы, то ΔBOC и ΔAOD – равнобедренные по признаку. Тогда OM – медиана прямоугольного ΔBOC, и $OM=0{,}5BC$. Аналогично, $ON=0{,}5AD$. Поэтому, $MN=MO+ON=0{,}5(AD+BC)$, откуда следует требуемое.
Опорная задача **(*о соотношениях отрезков в равнобедренной трапеции*)** 	**Пусть $ABCD$ – равнобедренная трапеция, $AD \parallel BC$, $AD = a$, $BC = b$ $(a > b)$, $BE \perp AD$, $CF \perp AD$. Тогда:** **1)** $AE = FD = \dfrac{a-b}{2}$; **2)** $AF = ED = \dfrac{a+b}{2}$. *Доказательство.* Прямоугольные $\Delta AEB=\Delta DFC$ по катету и гипотенузе ($AB=CD$ по определению равнобедренной трапеции, $BE=CF$ как высоты), отсюда $AE=DF$. $EF=BC$, т. к. $EBCF$ – параллелограмм по признаку.

Значит,

$$AE = FD = \frac{AD - EF}{2} = \frac{AD - BC}{2} = \frac{a - b}{2}. \text{ Тогда:}$$

$$AF = AE + EF = FD + EF = ED = b + \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

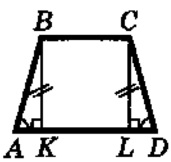
Теорема (***признаки равнобедренной трапеции***)



1. **Если в трапеции углы при одном основании равны, то трапеция – равнобедренная.**

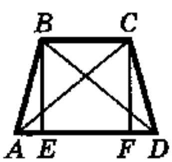
Доказательство.

1-ый способ.



2-ой способ.

2. **Если в трапеции диагонали равны, то трапеция – равнобедренная.**

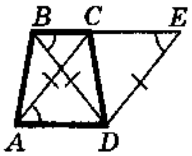


Доказательство.

1-ый способ.

Прямоугольные $\Delta BED = \Delta CFA$ по гипотенузе и катету ($AC = BD$ по условию, $BE = CF$ как высоты). Значит, $\angle CAF = \angle BDE$.

Рассмотрим ΔABD и ΔDCA. У них: AD – общая, $AC = BD$ по условию, $\angle CAD = \angle BDA$ по доказанному. Значит, $\Delta ABD = \Delta DCA$ по I признаку и $AB = CD$.



2-ой способ.

Проведем через точку D прямую, параллельную AC. Пусть она пересечет прямую BC в точке E. Четырехугольник $ACED$ – параллелограмм по определению, поэтому $DE=AC=BD$, $\angle DEC=\angle DAC$.

ΔDBE – равнобедренный по определению, поэтому $\angle EBD=\angle BED$, а значит, $\angle DBC=\angle CAD$.

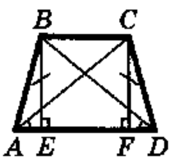
Но $\angle DBC=\angle ADB$ как накрест лежащие при $AD \| BC$ и секущей BD. Поэтому $\angle BDA=\angle DAC$.

Рассмотрим ΔABD и ΔDCA. У них: AD – общая, $AC=BD$ по условию, $\angle DAC=\angle BDA$ по доказанному. Значит, $\Delta ABD=\Delta DCA$ по I признаку и $AB=CD$.

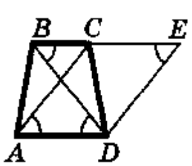
3. Если в трапеции диагонали образуют с основанием равные углы, то трапеция – равнобедренная.

Доказательство.

1-ый способ.



2-ой способ.



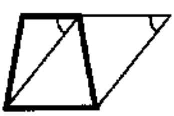
Замечание. В случае углов при меньшем основании доказательства можно либо проводить аналогично, либо свести к случаю углов при большем основании.

Дополнительные построения в задачах о трапециях

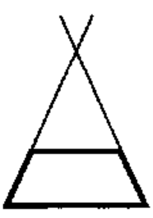
1. Проведение диагоналей.

2. Проведение высот (обычно из вершин тупых углов).

3. Проведение через вершину трапеции прямой, параллельной одной из боковых сторон.

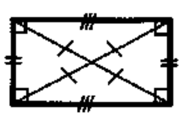


4. Проведение через вершину трапеции прямой, параллельной одной из диагоналей.



5. Продление боковых сторон трапеции до пересечения.

Прямоугольник

Определение прямоугольника 	**Прямоугольником** называется параллелограмм, у которого все углы прямые. ***Замечание.*** Определение прямоугольника может быть дано и в таком виде: прямоугольник – это четырехугольник, у которого все углы прямые, что следует из доказанного далее признака.
Теорема (*свойство диагоналей прямоугольника*) 	**Диагонали прямоугольника равны.** *Доказательство.*
Свойства прямоугольника 	**1. Противоположные стороны прямоугольника равны.** **2. Все углы прямоугольника – прямые.** **3. Диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам.** ***Замечание.*** Т. к. прямоугольник является параллелограммом, то все свойства параллелограмма справедливы и для прямоугольника.
Типовая задача	*Диагональ делит угол прямоугольника в отношении 5:4. Найдите угол между диагоналями данного прямоугольника.* *Решение.* *Ответ*: 80°.

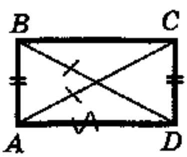
Теорема
(*признаки прямоугольника*)

1. **Если в параллелограмме все углы равны, то этот параллелограмм – прямоугольник.**

Доказательство.

2. **Если в параллелограмме один угол – прямой, то этот параллелограмм – прямоугольник.**

Доказательство.



3. **Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм – прямоугольник.**

Доказательство.

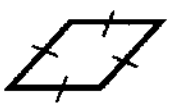
Рассмотрим ΔABD и ΔDCA.

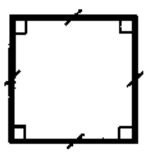
4. **Если в четырехугольнике три угла – прямые, то этот четырехугольник – прямоугольник.**

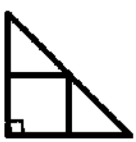
Доказательство.

<table>
<tr><td>Полезная задача</td><td>Докажите, что если в четырехугольнике все углы равны, то этот четырехугольник – прямоугольник.</td></tr>
<tr><td>Полезная задача</td><td>Докажите, что биссектрисы углов параллелограмма с неравными смежными сторонами при пересечении образуют прямоугольник.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ромб</td></tr>
<tr><td>Определение ромба
</td><td>Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.
Замечание. Определение ромба может быть дано в таком виде: ромб – это четырехугольник, у которого все стороны равны. Это следует из доказанных далее признаков ромба.</td></tr>
<tr><td>Теорема (свойства диагоналей ромба)
</td><td>Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.
Доказательство.</td></tr>
<tr><td>Свойства ромба
</td><td>1. Все стороны ромба равны.
2. Противолежащие углы ромба равны, а углы, прилежащие к одной стороне, в сумме дают 180°.
3. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам, являются биссектрисами углов ромба.
Замечание. Т.к. ромб является параллелограммом, то все свойства параллелограмма справедливы и для ромба. Также ромб является дельтоидом.</td></tr>
</table>

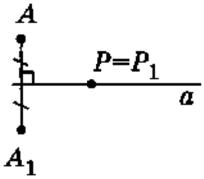
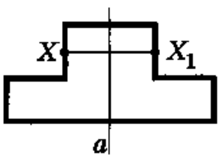
Типовая задача	***Диагональ ромба длиной 6 см проведена из вершины угла, равного 120°. Найдите периметр ромба.*** *Решение.* *Ответ*: 24 см.
<u>Теорема</u> **(*признаки ромба*)**  	**1. Если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм – ромб.** *Доказательство.* **2. Если в параллелограмме диагонали делят его углы пополам, то этот параллелограмм – ромб.** *Доказательство.*

 	**3. Если в параллелограмме две смежные стороны равны, то этот параллелограмм – ромб.** *Доказательство.* **4. Если в четырехугольнике все стороны равны, то этот четырехугольник – ромб.** *Доказательство.*
Полезная задача	*Докажите, что если в параллелограмме одна из диагоналей делит угол параллелограмма пополам, то этот параллелограмм – ромб.*
Полезная задача	*Докажите, что если в четырехугольнике диагонали делят его углы пополам и взаимно перпендикулярны, то этот четырехугольник – ромб.*
Типовая задача	*Равнобедренные треугольники ABC и ADC имеют общее основание AC. Докажите, что если $\angle B = \angle D$, но точки B и D не совпадают, то ABCD – ромб.* *Решение.*

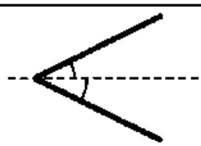
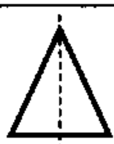
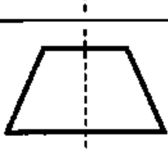
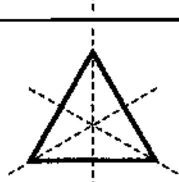
Полезная задача	*Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.*
Полезная задача	*Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.*
Полезная задача	*Докажите, что середины сторон равнобедренной трапеции являются вершинами ромба. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.*
Полезная задача	*Докажите, что параллелограмм, у которого все высоты равны, является ромбом.*
Квадрат	
Определение квадрата 	**Квадрат** – это прямоугольник, у которого все стороны равны. ***Замечание.*** Определение квадрата может быть дано в таком виде: квадрат – это четырехугольник, у которого все стороны и все углы равны. Это следует из доказанной ниже теоремы.
Теорема (***признак квадрата***)	**Если в четырехугольнике все стороны равны и все углы равны, то этот четырехугольник – квадрат.** *Доказательство.*

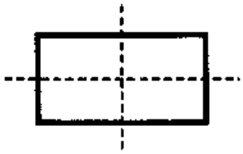
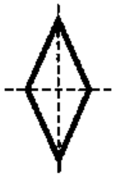
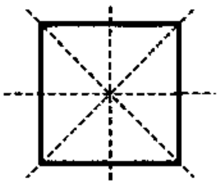
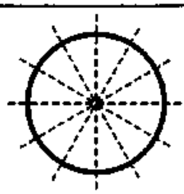
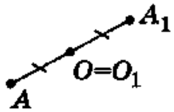
Свойства квадрата  	**1. Все стороны квадрата равны.** **2. Все углы квадрата – прямые.** **3. Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, делятся точкой пересечения пополам.** **4. Диагонали квадрата образуют с его сторонами углы, равные 45°.** ***Замечание.*** Т.к. квадрат является параллелограммом, прямоугольником и ромбом, то все их свойства справедливы и для квадрата.
Полезная задача	*Докажите, что если диагонали прямоугольника взаимно перпендикулярны, то он является квадратом.*
Полезная задача	*Докажите, что если диагонали ромба равны, то он является квадратом.*
Типовая задача 	*В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат с периметром 8 см (см. рисунок). Найдите катет треугольника.* *Решение.* *Ответ*: 4 см.

Осевая и центральная симметрия

Определение точек, симметричных относительно прямой 	Две точки А и A_1 называются **симметричными относительно прямой** a, если эта прямая проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к нему. Каждая точка прямой a считается симметричной самой себе.
Определение фигуры, имеющей ось симметрии 	Фигура называется **симметричной относительно прямой** a (фигура **обладает осевой симметрией**), если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой a также принадлежит этой фигуре. Прямая a называется **осью симметрии фигуры.**

Примеры фигур, обладающих осевой симметрией

	Фигура	**Количество и расположение осей симметрии**
	Неразвернутый угол	1 ось симметрии – прямая, содержащая биссектрису угла
	Равнобедренный (не равносторонний) треугольник	1 ось симметрии – прямая, проходящая через вершину и середину основания
	Равнобедренная трапеция	1 ось симметрии – прямая, проходящая через середины оснований
	Равносторонний треугольник	3 оси симметрии – прямые, содержащие медианы

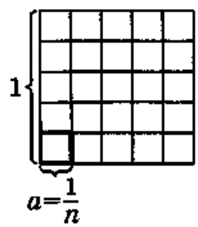
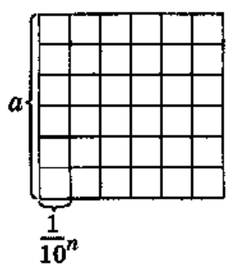
	Прямоугольник (не являющийся квадратом)	2 оси симметрии – прямые, проходящие через середины противоположных сторон
	Ромб (не являющийся квадратом)	2 оси симметрии – прямые, содержащие диагонали
	Квадрат	4 оси симметрии – прямые, содержащие диагонали, и прямые, проходящие через середины противоположных сторон
	Окружность	Бесконечно много осей симметрии – прямые, проходящие через центр
Полезная задача	*Докажите свойства симметрии фигур, приведенные в таблице.*	
Полезная задача	*Докажите, что разносторонний треугольник, параллелограмм(не прямоугольник и не ромб), неравнобедренная трапеция не имеют осей симметрии.*	
Полезная задача	*Докажите, что треугольник, имеющий ось симметрии, – равнобедренный.*	
Полезная задача	*Докажите, что диагонали равнобедренной трапеции пересекаются на ее оси симметрии.*	
Определение точек, симметричных относительно данной точки 	Две точки A и A_1 называются **симметричными относительно точки** O, если O – середина отрезка AA_1. Точка O считается симметричной самой себе.	

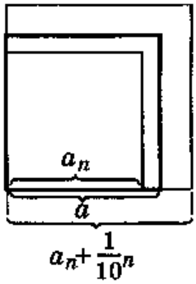
Определение фигуры, имеющей центр симметрии  	Фигура называется **симметричной относительно точки** O (фигура обладает **центральной симметрией**), если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этой фигуре. Точка O называется **центром симметрии фигуры.**	
Примеры фигур, обладающих центральной симметрией		
	Фигура	**Расположение центра симметрии**
	Отрезок	Середина отрезка
	Параллелограмм	Точка пересечения диагоналей
	Окружность	Центр окружности
Полезная задача	*Докажите свойства симметрии фигур, приведенные в таблице.*	
Полезная задача	*Докажите, что у треугольника нет центра симметрии.*	
Полезная задача	*Докажите, что любой многоугольник не может иметь более одного центра симметрии.*	
Полезная задача	*Докажите, что если фигура имеет две взаимно перпендикулярных оси симметрии, то точка их пересечения – центр симметрии этой фигуры. Верно ли обратное утверждение?*	

Дополнительные сведения и задачи по теме

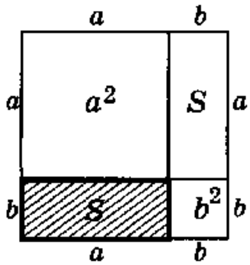
ПЛОЩАДИ

Площадь многоугольника

Основные свойства площадей	**Площадь многоугольника** – положительная величина, численное значение которой обладает такими свойствами **(аксиомы площади):** 1. Равные многоугольники имеют равные площади. 2. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников. 3. Площадь квадрата со стороной, равной единице измерения, равна квадратной единице. ***Обозначение.*** Обычно площадь обозначается буквой S.
Теорема ***(формула площади квадрата)***   	**Площадь квадрата равна квадрату его стороны.** *Доказательство.*



Теорема ***(формула площади прямоугольника)***



Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.

Доказательство.

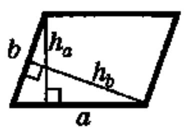
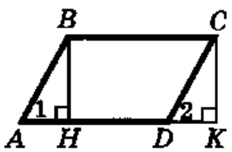
Типовая задача

Стороны прямоугольника относятся как 1:4, а его площадь равна 1 м². Найдите периметр прямоугольника.

Решение.

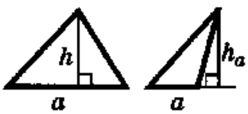
	Ответ: 5 м.

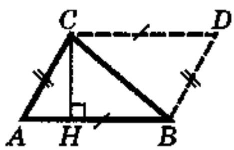
Площадь параллелограмма, треугольника и трапеции

Теорема ***(формула площади параллелограмма по стороне и высоте)***   	**Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне:** $$S = ah_a = bh_b,$$ **где a и b – стороны параллелограмма, h_a, h_b – высоты, проведенные к ним.** *Доказательство.*
Следствие	**В параллелограмме большей является высота, проведенная к меньшей стороне, меньшей – высота, проведенная к большей стороне.**
Метод вспомогательной площади (метод площадей)	При решении некоторых задач площадь используется как вспомогательная величина для вычисления линейных элементов фигуры. Такой метод, при котором, выражая площадь фигуры двумя различными способами, удается получить равенство, связывающее основные элементы фигуры, называют ***методом вспомогательной площади*** (или ***методом площадей***).
Типовая задача 	*Высоты параллелограмма равны 2 см и 3 см, а меньшая сторона равна 6 см. Найдите периметр параллелограмма.* *Решение.*

Ответ: 30 см.

Теорема
(*формула площади треугольника по стороне и высоте*)





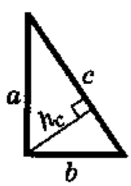
Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на проведенную к ней высоту:

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2},$$

где a, b, c – стороны треугольника, h_a, h_b, h_c – проведенные к ним высоты.

Доказательство.

Следствия



$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$$

1. **Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов:**

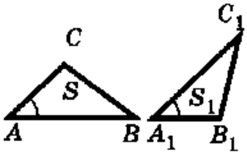
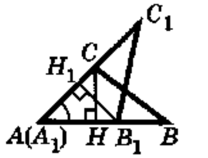
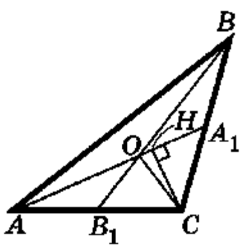
$$S = \frac{1}{2}ab,$$

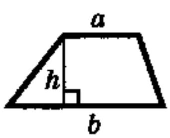
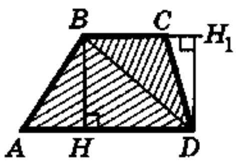
где a и b – катеты прямоугольного треугольника.

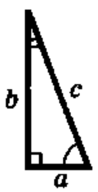
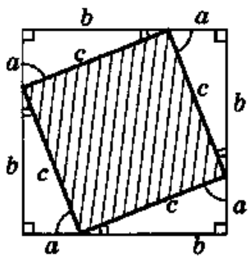
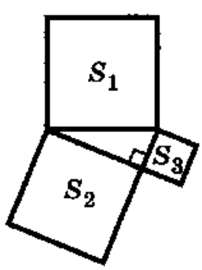
2. **Произведение катетов прямоугольного треугольника равно произведению его гипотенузы на высоту, проведенную к гипотенузе:**

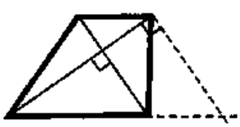
$$ab = ch_c.$$

	3. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $$S = \frac{d_1 d_2}{2}.$$ **4. Если высоты двух треугольников равны (или совпадают), то отношение их площадей равно отношению оснований.** ***Замечание.*** В частности, **медиана делит треугольник на два равновеликих** (равных по площади) **треугольника,** площадь каждого из которых равна половине площади данного треугольника.
Типовая задача 	*Найдите площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной* 6 *см и углом при вершине* 150°. *Решение.* *Ответ:* 9 см^2.
Теорема ***(о площадях треугольников с равным углом)***	**Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.** *Доказательство.*

 	
Полезная задача	*Стороны треугольника обратно пропорциональны его высотам, то есть* $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$. *Докажите.* ***(Это означает, что чем больше сторона треугольника, тем меньше проведенная к ней высота).***
Полезная задача	*Докажите, что сумма расстояний от любой внутренней точки равностороннего треугольника до его сторон равна высоте треугольника.*
Опорная задача ***(свойство медиан треугольника)*** 	**Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.** *Доказательство.* Пусть дан ΔABC, в котором медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Поскольку OB_1 – медиана ΔAOC, то по следствию из формулы площади треугольника $S_{\Delta AOB_1} = S_{\Delta COB_1} = S_1$. Аналогично, $S_{\Delta COA_1} = S_{\Delta BOA_1} = S_2$. Но AA_1 и BB_1 – медианы ΔABC, поэтому $\frac{1}{2}S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AA_1C} = S_{\Delta BB_1C}$, т. е. $2S_1 + S_2 = 2S_2 + S_1$, откуда $S_1 = S_2$. Треугольники AOC и COA_1 имеют общую высоту CH, проведенную из вершины C, поэтому $\frac{AO}{OA_1} = \frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta COA_1}} = \frac{2S_1}{S_1} = \frac{2}{1}$.

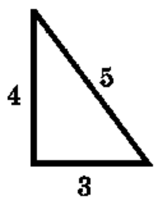
	Аналогично доказывается, что любая медиана треугольника при пересечении с любой другой медианой делится в отношении 2:1, считая от вершины. Отсюда следует, что все три медианы пересекаются в одной точке. ***Замечание.*** Точка пересечения медиан треугольника называется **центром масс (или центроидом)** треугольника.
Полезная задача	*Докажите, что при пересечении медиан треугольника образуется шесть равновеликих (равных по площади) треугольников. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.*
Полезная задача	*Докажите, что если в треугольнике две медианы равны, то этот треугольник – равнобедренный.*
Теорема ***(формула площади трапеции)***   	**Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту:** $$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$ *Доказательство.*
Типовая задача	*Бо́льшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 6 см, а острый угол — 30°. Найдите площадь трапеции, если ее периметр равен 29 см.* *Решение.*

	Ответ: 30 см^2.
Теорема Пифагора	
Теорема (***Пифагора***)  $a^2 + b^2 = c^2$ 	**В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.** *Доказательство.*
«Пифагоровы штаны»  $S_1 = S_2 + S_3$	Исторически возникновение и доказательства теоремы Пифагора связаны с площадями. Зная, что площадь квадрата равна квадрату его стороны, теорему Пифагора можно сформулировать так: **сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на его гипотенузе.**
Типовая задача	*Катеты прямоугольного треугольника относятся как 3:4, а гипотенуза равна 25 см. Найдите периметр треугольника.*

	Решение. *Ответ*: 60 см.
Типовая задача 	***Основания равнобедренной трапеции равны 20 см и 30 см, а боковые стороны равны 13 см. Найдите высоту трапеции.*** *Решение.* *Ответ*: 12 см.
Типовая задача 	***Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны и равны 1 см и $\sqrt{3}$ см. Найдите высоту трапеции.*** *Решение.* *Ответ*: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. ***Указание.*** Используйте метод площадей.

Типовая задача	*Высота ромба равна 24 см, а его диагонали относятся как 3:4. Найдите площадь ромба.* *Решение.* *Ответ*: 600 см^2. ***Указание.*** **Используйте метод площадей.**
Полезная задача	*Докажите, что для равностороннего треугольника со стороной а справедливы формулы:* 1) *высоты:* $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; 2) *площади:* $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Полезная задача	*Докажите, что:* 1) *гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом а вычисляется по формуле* $c=a\sqrt{2}$; 2) *диагональ квадрата со стороной а вычисляется по формуле* $d=a\sqrt{2}$.
Теорема (*обратная к теореме Пифагора*) 	**Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то такой треугольник – прямоугольный. При этом первые две стороны – катеты, а третья – гипотенуза, т. е. если $AC^2+BC^2=AB^2$, то $\angle ACB=90°$.** *Доказательство.*

Египетский треугольник, «пифагоровы тройки»



В Древнем Египте для построения прямого угла использовали треугольник со сторонами 3, 4, 5 (египетский треугольник).

Если длины сторон прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, то эти числа образуют «пифагоровы тройки».

Пользуясь теоремой, обратной к теореме Пифагора, можно составить такие тройки чисел[1] a, b, c:

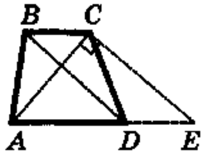
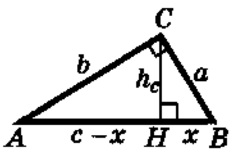
a	3	5	7	8	9	20	28	$2mn$	
b	4	12	24	15	40	21	45	m^2-n^2	
c	5	13	25	17	41	29	53	m^2+n^2	

Типовая задача

Определите, является ли треугольник со сторонами, пропорциональными данным трем числам, прямоугольным:
а) 6, 8, 10; *б*) 5, 6, 7.

Решение.

[1] $m, n \in \mathbb{N}, m > n$.

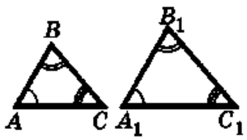
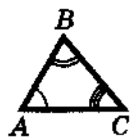
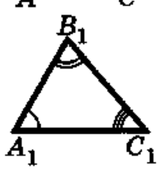
Типовая задача 	*Основания трапеции равны 8 см и 42 см, а диагонали – 30 см и 40 см. Найдите площадь трапеции.* *Решение.* *Ответ*: 600 см^2.
Опорная задача **(*формула Герона*)** 	**Площадь треугольника со сторонами a, b и c вычисляется по формуле:** $$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$ **где** $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ **– полупериметр треугольника.** *Доказательство.*

	Указание. Выразите CH из ΔACH и ΔBCH, найдите x и выразите $S_{\Delta ABC}$.
Типовая задача	*Найдите наименьшую высоту в треугольнике со сторонами*: 1) 5, 5, 6; 2) 13, 14, 15 . *Решение.* *Ответ*: *а*) 4; *б*) 11,2.
Типовая задача	*Основания трапеции равны* 20 *см и* 60 *см, а боковые стороны –* 13 *см и* 37 *см. Найдите площадь трапеции.* *Решение.* *Ответ*: 480 см^2.

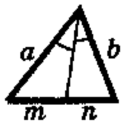
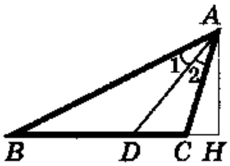
Дополнительные сведения и задачи по теме

ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

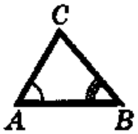
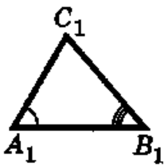
Определение подобных треугольников

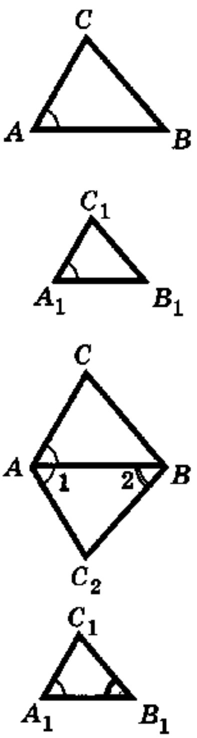
Определение отношения отрезков и пропорциональных отрезков	**Отношением отрезков** называется отношение их длин. Отрезки AB и CD **пропорциональны** отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, если $\frac{AB}{CD}=\frac{A_1B_1}{C_1D_1}$ (или $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}$).
Определение сходственных сторон  	Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$. Тогда стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 называются **сходственными**.
Определение подобных треугольников   	Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого, т. е. два треугольника подобны, если их можно обозначить буквами ABC и $A_1B_1C_1$ так, что $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=k$. Число k, равное отношению сходственных сторон треугольников, называется **коэффициентом подобия**. ***Обозначение.*** Подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ обозначается так: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. ***Замечания.*** 1) Обычно запись $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ означает, что стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 – сходственные. Поэтому условия $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta ABC \sim \Delta B_1A_1C_1$ не равнозначны, так как означают равенство разных пар углов и пропорциональность разных сторон треугольников. 2) Из соотношения $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$ очевидно следует соотношение $AB{:}AC{:}BC=A_1B_1{:}A_1C_1{:}B_1C_1$, также выражающее пропорциональность сторон треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

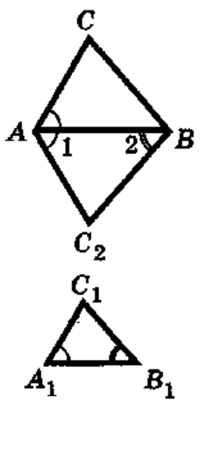
	3) Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия: $$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = k.$$
Типовая задача	***Стороны треугольника относятся как 2:4:5. Найдите периметр треугольника, подобного данному, если сумма его наибольшей и наименьшей сторон равна 21 см.*** ***Решение.*** ***Ответ*: 33 см.**
<u>Теорема</u> ***(об отношении площадей подобных треугольников)***	**Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия:** $$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = k^2.$$ ***Доказательство.***

<u>**Опорная задача**</u> ***(свойство биссектрисы треугольника)***  $\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\left(\textbf{или } \frac{a}{m}=\frac{b}{n}\right)$ 	**Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.** *Доказательство.*
Типовая задача	*Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки длиной 15 см и 20 см. Найдите длины катетов.* *Решение.* *Ответ*: 21 см, 28 см.
Полезная задача	*Стороны треугольника равны a, b, c. Докажите, что длины отрезков, на которые биссектрисы делят эти стороны треугольника, соответственно равны* $\frac{ac}{b+c}$ *и* $\frac{ab}{b+c}$; $\frac{bc}{a+c}$ *и* $\frac{ba}{a+c}$; $\frac{ca}{a+b}$ *и* $\frac{cb}{a+b}$.

Признаки подобия треугольников

<table>
<tr>
<td><u>Теорема</u>
(1-ый признак подобия треугольников – по двум углам)

</td>
<td>Если два угла одного треугольника равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.
Доказательство.</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Следствия</u></td>
<td>1. Равносторонние треугольники подобны.
2. Равнобедренные прямоугольные треугольники подобны.
3. Равнобедренные треугольники подобны, если они имеют по равному углу между соответствующими сторонами.</td>
</tr>
<tr>
<td>Типовая задача</td>
<td>На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и K соответственно так, что $MK \parallel AC$, $MB:MA = 2:5$. Найдите площадь четырехугольника AMKC, если площадь треугольника ABC равна 98 см^2.
Решение.
Ответ: 90 см^2.</td>
</tr>
</table>

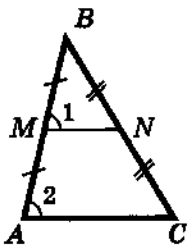
Полезная задача	*Докажите, что прямая, параллельная одной из сторон треугольника и пересекающая две другие стороны, отсекает треугольник, подобный данному.*
Полезные задачи	1) *Докажите, что при пересечении диагоналей трапеции образуется два подобных треугольника.* 2) *Докажите, что диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника, два из которых имеют равные площади, а площади двух других относятся как квадраты оснований.*
Теорема **(2-ой *признак подобия треугольников – по двум пропорциональным сторонам и углу между ними*)**  	**Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.** *Доказательство.*

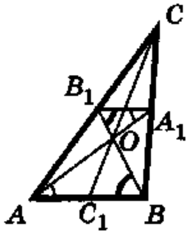
Типовая задача	***Прямая, пересекающая стороны ВА и ВС треугольника АВС, делит каждую из них в отношении т:п, считая от вершины В. Докажите, что данная прямая параллельна стороне АС.*** *Решение.*
<u>Теорема</u> **(3-*ий признак подобия треугольников — по трем пропорциональным сторонам*)**  	**Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.** *Доказательство.*

Типовая задача	***Основание и боковая сторона одного равнобедренного треугольника равны 12 см и 10 см, а основание другого равнобедренного треугольника и проведенная к нему медиана равны 18 см и 12 см. Подобны ли данные треугольники?*** *Решение.*
<u>Опорная задача</u> (*об отношении линейных элементов подобных треугольников*)	**У подобных треугольников отношение соответствующих линейных элементов (медиан, биссектрис, высот и т. д.) равно коэффициенту подобия.** *Доказательство.* ***Указание.*** Доказательство проведите для одного из линейных элементов.

Применение подобия к доказательству теорем и решению задач

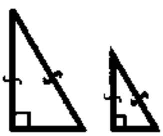
Средняя линия треугольника

Определение средней линии треугольника  	**Средней линией треугольника** называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон. ***Замечание.*** В любом треугольнике можно провести три средних линии.
<u>Теорема</u> ***(свойство средней линии треугольника)*** 	**Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух его сторон, параллельна третьей стороне и равна половине этой стороны.** *Доказательство.*
Типовая задача	*Периметр треугольника равен 76 см. Стороны треугольника, образованного средними линиями данного треугольника, относятся как 4:7:8. Найдите стороны данного треугольника.*

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Решение.</td>
</tr>
<tr>
<td>Полезная задача</td>
<td>Докажите, что:
1) периметр треугольника, образованного средними линиями данного треугольника, вдвое меньше периметра данного треугольника;
2) площадь треугольника, образованного средними линиями данного треугольника, вчетверо меньше площади данного треугольника;
3) средние линии разбивают треугольник на четыре треугольника равной площади.</td>
</tr>
<tr>
<td>Полезная задача

</td>
<td>Пользуясь свойством средней линии и признаками подобия треугольников, докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины.</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Теорема</u>
(признаки подобия прямоугольных треугольников)
</td>
<td>1. <u>По острому углу</u>. Если прямоугольные треугольники имеют по равному острому углу, то они подобны.
Доказательство.</td>
</tr>
</table>

2. **<u>По двум пропорциональным катетам</u>. Если катеты одного прямоугольного треугольника пропорциональны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны.**

Доказательство.



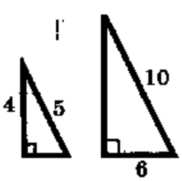
3. **<u>По пропорциональным катету и гипотенузе</u>. Если катет и гипотенуза одного прямоугольного треугольника пропорциональны катету и гипотенузе другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны.**

Доказательство.

Типовая задача

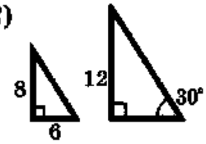
Определите, подобны ли прямоугольные треугольники на данных рисунках.

1)



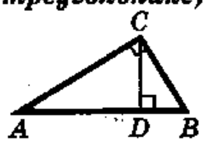
Решение.

2)



Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

<u>Опорная задача</u>
(*о подобии в прямоугольном треугольнике*)



Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два подобных прямоугольных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику.

Доказательство.

Определение среднего пропорционального двух чисел

Отрезок XY называется **средним пропорциональным (средним геометрическим)** между отрезками AB и CD, если

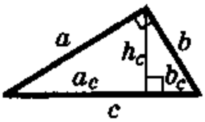
$$\frac{AB}{XY} = \frac{XY}{CD} \quad \left(\text{или } XY = \sqrt{AB \cdot CD}\right).$$

<u>Опорная задача</u>
(*метрические соотношения элементов прямоугольного треугольника*)

1. **Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые она делит гипотенузу:**

$$\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}, \text{ или } h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c}.$$

Доказательство.

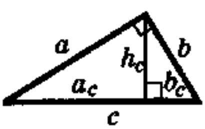


2. Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключенным между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла:

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{a_c}, \text{ или } a = \sqrt{c \cdot a_c}; \quad \frac{c}{b} = \frac{b}{b_c}, \text{ или } b = \sqrt{c \cdot b_c}.$$

Доказательство.

Замечания.



1) Отрезки, на которые гипотенуза делится высотой, проведенной из вершины прямого угла, иногда называют *проекциями катетов на гипотенузу*.
2) При решении задач, связанных с пропорциональными отрезками в прямоугольном треугольнике, часто используется доказанная ранее методом площадей формула $ab = ch_c$, которая также может быть получена с помощью применения ранее доказанных соотношений:

$$a \cdot b = \sqrt{c \cdot a_c} \cdot \sqrt{c \cdot b_c} = c\sqrt{a_c \cdot b_c} = c \cdot h_c.$$

Типовая задача	*Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки длиной 15 см и 20 см. Найдите длины отрезков, на которые ее делит высота треугольника.*

	Решение. *Ответ*: **12,6 см и 22,4 см.**
Полезная задача	*Доказите, что проекции катетов на гипотенузу относятся как квадраты катетов:* $\frac{a_c}{b_c} = \frac{a^2}{b^2}$.

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

Определение тригонометрических функций

Синусом острого угла α прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего (этому углу) катета к гипотенузе.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Косинусом острого угла α прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего (к этому углу) катета к гипотенузе.

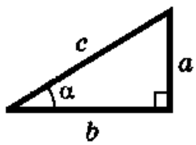
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Тангенсом острого угла α прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Котангенсом острого угла α прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

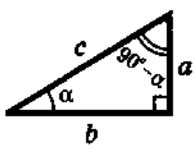
Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника	**Неизвестная сторона**	**Правило вычисления**	**Формула**
	**Противолежащий катет**	1. Катет, противолежащий углу α, равен произведению гипотенузы на sinα. 2. Катет, противолежащий углу α, равен произведению прилежащего катета на tg α.	$a = c \cdot \sin\alpha$ $a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha$
	Прилежащий катет	1. Катет, прилежащий к углу α, равен произведению гипотенузы на cos α. 2. Катет, прилежащий к углу α, равен произведению противолежащего катета на ctg α.	$b = c \cdot \cos\alpha$ $b = a \cdot \operatorname{ctg}\alpha$
	Гипотенуза	1. Гипотенуза равна отношению противолежащего катета к sin α. 2. Гипотенуза равна отношению прилежащего катета к cos α.	$c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$ $c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$

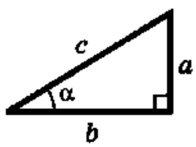
Опорная задача (***о зависимости тригонометрических функций от величины угла***)

Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны, косинусы этих углов равны, тангенсы этих углов равны и котангенсы этих углов тоже равны.

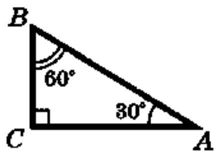
Доказательство.

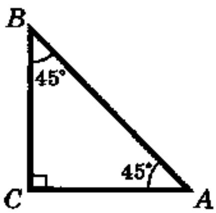
Замечание. Таким образом, тригонометрические функции острого угла не зависят от размеров и расположения треугольника, а зависят только от величины угла.

Типовая задача	***В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 34 см, а косинус одного из углов равен $\frac{8}{17}$. Найдите катеты треугольника.*** *Решение.*
<u>Опорная задача</u> **(*формулы дополнения*)** 	**Для любого острого угла α верны равенства:** $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$; $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$; $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$. *Доказательство.*
Типовая задача	***Найдите неизвестные стороны и острые углы прямоугольного треугольника с катетами 5 см и 12 см.*** *Решение.*

<u>**Опорная задача**</u> ***(основное тригонометрическое тождество; тригонометрические формулы одного аргумента)*** 	**Для любого острого угла α верны равенства:** **1)** $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; **2)** $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; **3)** $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$; **4)** $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; **5)** $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; **6)** $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$; **7)** $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$. ***Доказательство.***
Типовая задача	*Вычислите* $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$, *если* $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$. ***Решение.***

<u>Опорная задача</u> (***значения тригонометрических функций некоторых острых углов***)





α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Доказательство.

Типовая задача	***Упростите выражение:*** $$\operatorname{tg} 45^\circ \cdot \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos 60^\circ}.$$ ***Решение.*** ***Ответ:*** **1.**
Типовая задача	***Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, если его основание равно 18 см, а угол при вершине, противолежащей основанию, равен 120°.*** ***Решение.*** ***Ответ:*** $6\sqrt{3}$ см.
Полезная задача	***Докажите, что синус и косинус любого острого угла меньше единицы.***
Полезная задача (о монотонности тригонометрических функций)	***Докажите, что если*** $0^\circ < \alpha < \beta < 90^\circ$, ***то*** $\sin\alpha < \sin\beta$, $\cos\alpha > \cos\beta$, $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\alpha > \operatorname{ctg}\beta$.

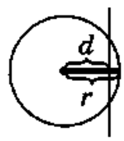
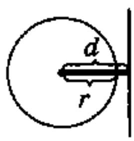
Дополнительные сведения и задачи по теме

ОКРУЖНОСТЬ

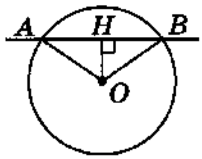
Окружность и касательная

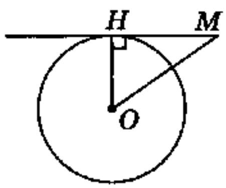
<u>**Опорная задача**</u>
(*о взаимном расположении прямой и окружности*)

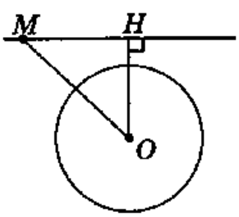
Пусть окружность с центром в точке *O* имеет радиус *r*, а расстояние от точки *O* до некоторой прямой равно *d*. Тогда:

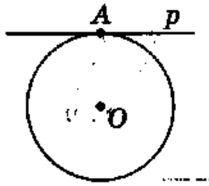
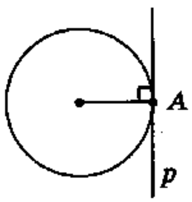
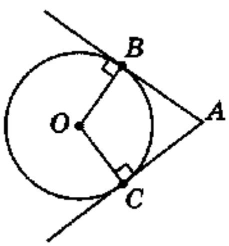
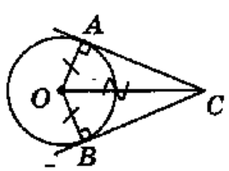
	Соотношение параметров	**Взаимное расположение прямой и окружности**
	$r>d$	Пересекаются в двух точках
	$r=d$	Касаются (в одной точке)
	$r<d$	Не имеют общих точек (не пересекаются)

Доказательство.

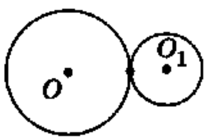
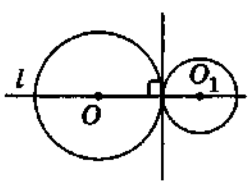
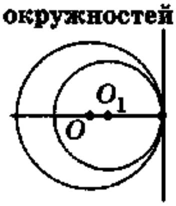


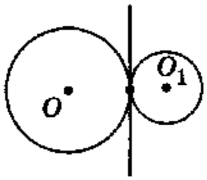




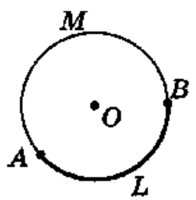
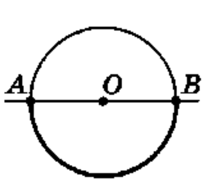
Определение касательной к окружности 	**Касательной к окружности** называется прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку **(точку касания).** *p* – касательная, *A* – точка касания.
<u>Теорема</u> (***основное свойство касательной***) 	**Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.** *Доказательство.*
Определение отрезков касательной 	Пусть из точки *A* к окружности проведены две касательные, *B* и *C* – точки касания. Отрезки *AB* и *AC* называются **отрезками касательных,** проведенными из точки *A*.
<u>Опорная задача</u> (***свойство отрезков касательных***) 	**Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.** *Доказательство.*

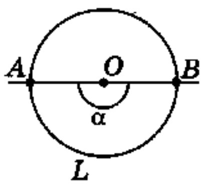
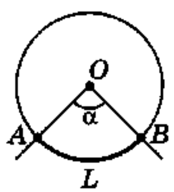
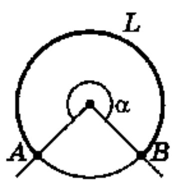
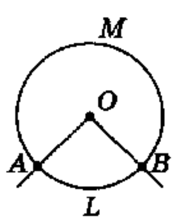
<u>Теорема</u> **(*признак* *касательной*)**	**Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.** *Доказательство.*
Типовая задача	*Через точку окружности радиуса r проведены касательная и хорда, равная $r\sqrt{3}$. Найдите угол между ними.* *Решение.* ***Ответ*: 60°.**
<u>Опорная задача</u> **(*о построении* *касательной*)**	**Через данную точку A провести касательную к данной окружности с центром в точке O.** *Решение.* **1) Пусть точка A лежит на окружности.**

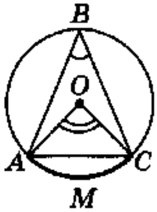
	2) Пусть точка A лежит вне окружности. 3) Пусть точка A лежит внутри окружности.
Полезная задача	***Постройте касательную к окружности, проходящую через данную точку вне этой окружности, другими способами.***
Определение касающихся окружностей   	Две **окружности**, имеющие общую точку, **касаются** в этой точке, если они имеют в ней общую касательную. Эта точка называется **точкой касания** окружностей. ***Замечание.*** Радиусы касающихся окружностей, проведенные в точку касания, лежат на одной прямой – *линии центров*, перпендикулярной к общей касательной и проходящей через точку касания. l – линия центров.
Виды касания окружностей  	Касание окружностей называется **внутренним**, если центры окружностей лежат по одну сторону от их общей касательной, проведенной через точку касания.

	Касание окружностей называется **внешним**, если центры окружностей лежат по разные стороны от их общей касательной, проведенной через точку касания.
Полезная задача (о межцентровом расстоянии двух касающихся окружностей)	*Расстояние между центрами двух касающихся окружностей с радиусами R и r ($R>r$) равно $R+r$ в случае внешнего касания и $R-r$ в случае внутреннего касания; при этом точка касания лежит на линии центров. Докажите.* *Сформулируйте и докажите обратное утверждение.*
Полезная задача	*Докажите, что если две окружности касаются, то у них только одна общая точка.*
Полезная задача	*Докажите, что если окружности пересекаются в двух точках, то прямая, проходящая через эти точки, перпендикулярна к линии центров данных окружностей.*
Полезная задача	*Постройте три общие касательные двух окружностей, касающихся внешним образом.*

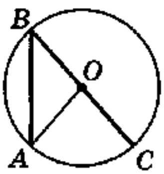
Центральные и вписанные углы

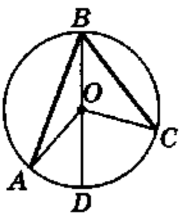
Определение дуги окружности  	**Дугой окружности** называется множество точек окружности, лежащих по одну сторону от прямой, пересекающей эту окружность. Точки пересечения прямой и окружности называются **концами дуги.** ***Замечание.*** Любые две точки окружности разделяют ее на две дуги. ***Обозначение.*** Дуга с концами в точках A и B, содержащая точку L, обозначается $\cup ALB$. Иногда дуга с концами в точках A и B обозначается $\cup AB$. Точки A и B делят окружность на дуги $\cup ALB$ и $\cup AMB$. Дуга называется **полуокружностью,** если отрезок, соединяющий ее концы, является диаметром окружности.
Определение центрального угла	**Центральным углом** окружности называется угол с вершиной в центре окружности.

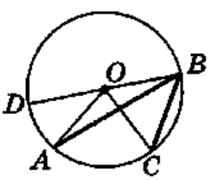
	$\angle AOB$ – центральный.
Определение дуги, соответствующей центральному углу   	Центральному углу AOB соответствуют две дуги с концами A и B. *Если* $\angle AOB$ – развернутый, то ему соответствуют две полуокружности. *Если* $\angle AOB$ – неразвернутый (меньше развернутого), то $\cup AB$, расположенная внутри этого угла, меньше полуокружности, а $\cup AB$, расположенная вне этого угла, больше полуокружности. *Если* $\cup AB$ окружности с центром в точке O меньше полуокружности или является полуокружностью, то ее градусная мера равна градусной мере центрального угла AOB. *Если* $\cup AB$ больше полуокружности, то ее градусная мера равна $360° - \angle AOB$. ***Замечание.*** Если ввести α, как показано на рисунках, то $\cup ALB = \alpha$.
Градусная мера окружности 	Сумма градусных мер двух дуг окружности с общими концами равна 360°: $$\cup ALB + \cup AMB = 360°.$$ Иногда говорят, что **градусная мера окружности равна 360°**.
Определение вписанного угла	**Вписанным углом** называется угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность.

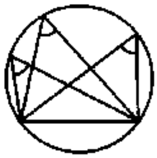
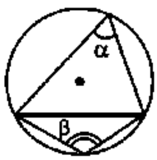
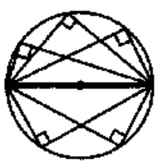
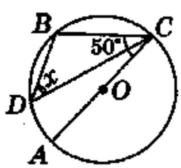
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Дуга окружности, расположенная внутри вписанного угла, называется дугой, на которую опирается данный вписанный угол. Говорят также, что вписанный угол опирается на хорду, концами которой являются концы этой дуги.

$\angle ABC$ – вписанный угол, опирающийся на дугу AMC (или хорду AC).</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Теорема</u>
(о вписанном угле)

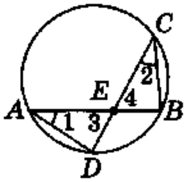






</td>
<td>Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.
Доказательство.</td>
</tr>
</table>

Следствия   $\alpha + \beta = 180°$ 	**1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.** **2. Любая пара вписанных углов, опирающихся на одну и ту же хорду, в сумме составляет 180°, если их вершины лежат по разные стороны от хорды.** **3. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, – прямой.** *Доказательство.*
Типовая задача  $\angle BCA = 50°$	***Найдите x.*** *Решение.*
Полезная задача	***Докажите, что градусные меры дуг окружности, заключенных между двумя параллельными хордами, равны.***
Полезная задача	***Докажите, что из любой точки вне окружности диаметр окружности виден под острым углом, а из любой точки внутри окружности – под тупым.***

<u>Теорема</u>
(о произведении отрезков пересекающихся хорд)

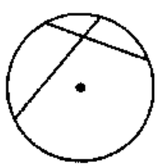


Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды:

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED.$$

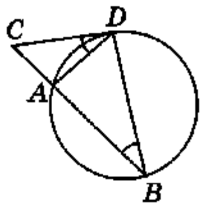
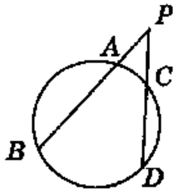
Доказательство.

Типовая задача



При пересечении двух хорд одна из них делится на отрезки длиной 20 см и 4 см, а разность длин отрезков второй хорды равна 2 см. Найдите длину второй хорды.

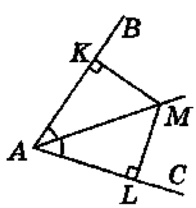
Решение.

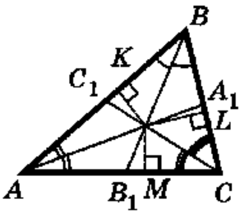
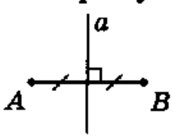
	Ответ: 18 см.
<u>**Опорная задача**</u> ***(о пропорциональности отрезков секущей и касательной)***  	**Квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков секущей, проведенной из той же точки:** $$CD^2 = CA \cdot CB.$$ *Доказательство*[1]. ***Замечание.*** Иногда отрезок AC называют *внешней частью секущей*, а отрезок AB – *внутренней*. Тогда произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату отрезка касательной, проведенной из той же точки.
<u>**Следствие**</u>  	**Произведение секущей на ее внешнюю часть одинаково для всех секущих данной окружности, проходящих через одну точку:** $$AP \cdot BP = CP \cdot DP.$$

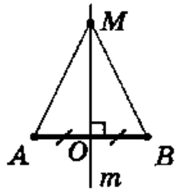
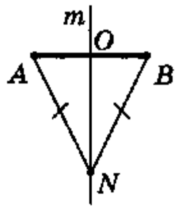
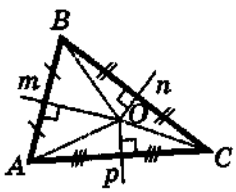
[1] Для доказательства используется теорема об угле между хордой и касательной, помещенная в приложении.

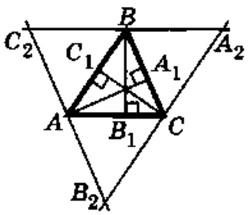
Типовая задача	***Из точки вне окружности, удаленной на 13 см от центра окружности, проведена секущая, пересекающая окружность в точках, расстояние между которыми равно 7 см. Найдите расстояние от этих точек до данной, если кратчайшее расстояние от данной точки до окружности равно 6 см.*** ***Решение.*** *Ответ*: 8 см и 15 см.

Четыре замечательные точки треугольника

Теорема (***о биссектрисе угла***) 	**Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон (т. е. от прямых, содержащих стороны угла).** Обратно: **каждая точка, лежащая внутри угла и равноудаленная от его сторон, лежит на его биссектрисе.** *Доказательство.*

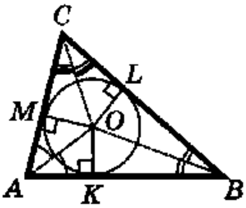
Следствие (*о пересечении биссектрис треугольника*)  	**Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.** *Доказательство.*
Полезная задача	*Докажите, что если точка, лежащая внутри угла, равноудалена от прямых, содержащих стороны угла, то основания перпендикуляров, проведенных из этой точки к указанным прямым, лежат на сторонах угла.*
Определение серединного перпендикуляра к отрезку  	**Серединным перпендикуляром** к отрезку называется прямая, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная к нему.

<u>Теорема</u> ***(о серединном перпендикуляре к отрезку)***   	**Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.** Обратно: **каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку.** *Доказательство.*
<u>Следствие</u> ***(о пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника)***  	**Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.** *Доказательство.*

<u>Опорная задача</u> ***(о построении серединного перпендикуляра)***	**Постройте серединный перпендикуляр к данному отрезку.** *Решение.*
<u>**Теорема**</u> ***(о пересечении высот треугольника)*** 	**Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.** *Доказательство.* ***Замечание.*** Точка пересечения высот (или продолжений высот) треугольника называется *ортоцентром*.
Замечательные точки треугольника	Замечательными точками треугольника называют: 1) точку пересечения медиан (центроид); 2) точку пересечения биссектрис (инцентр); 3) точку пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника; 4) точку пересечения высот или их продолжений (ортоцентр).

Полезная задача	*Докажите, что если какие-либо две замечательные точки треугольника совпадают, то треугольник является равносторонним.*
Типовая задача	*Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что точка A — ортоцентр треугольника HBC.* *Решение.*
	Вписанная окружность
Определение окружности, вписанной в многоугольник 	Окружность называется **вписанной в многоугольник**, если она касается всех его сторон (т. е. прямые, содержащие стороны многоугольника, касаются окружности в точках, лежащих на сторонах). При этом многоугольник называется **описанным около окружности.**

Теорема
(*об окружности, вписанной в треугольник*)

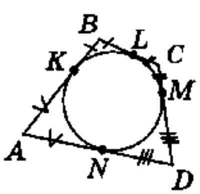


В любой треугольник можно вписать окружность, и притом только одну.
Центр вписанной окружности является точкой пересечения биссектрис треугольника.

Доказательство.

Замечание. Центр вписанной окружности иногда называется *инцентром* треугольника и иногда обозначается буквой I.

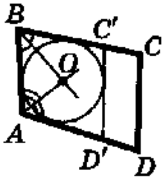
Теорема
(*необходимое и достаточное условие описанного четырехугольника*)

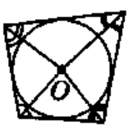


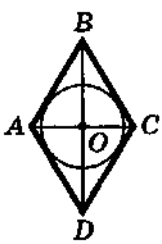
Если выпуклый четырехугольник описан около окружности, то суммы его противоположных сторон равны. Обратно: если в выпуклом четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, то он является описанным.

Доказательство.

1. Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около окружности.

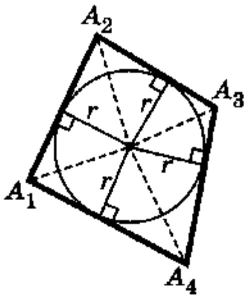
<table>
<tr>
<td>


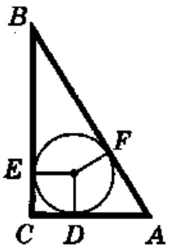
</td>
<td>2. Пусть $AD+BC=AB+CD$.</td>
</tr>
<tr>
<td>
Положение центра окружности, вписанной в четырехугольник


</td>
<td>Если существует окружность, вписанная в четырехугольник, то она единственна, и ее центр лежит на пересечении биссектрис углов этого четырехугольника.</td>
</tr>
<tr>
<td>
<u>Опорная задача</u>
(о параллелограмме, описанном около окружности)


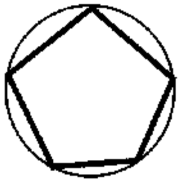
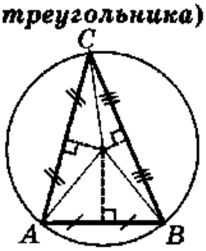
</td>
<td>
В параллелограмм можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является ромбом. Центром окружности является точка пересечения его диагоналей.
Доказательство.
</td>
</tr>
</table>

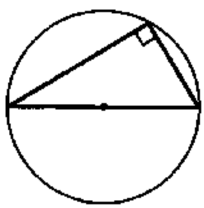
	Следствие. Точка пересечения диагоналей ромба – единственная точка, равноудаленная от его сторон.
Полезная задача	*Докажите, что радиус вписанной в ромб окружности в 2 раза меньше его высоты:* $r = \dfrac{h}{2}$.
Типовая задача	*В ΔABC со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 7$ м, $AC = 10$ м вписана окружность. Прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках M и K, касается этой окружности. Найдите периметр ΔMBK.* ***Решение.*** *Ответ*: 2 м.
Полезная задача	*Докажите, что если в многоугольник можно вписать окружность, то:* **1)** *биссектрисы всех углов многоугольника пересекаются в одной точке;* **2)** *центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис многоугольника.*

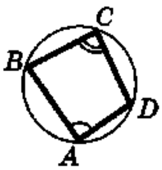
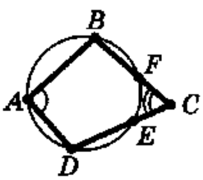
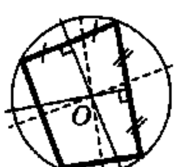
Опорная задача *(формула площади описанного многоугольника)* 	**Если в многоугольник вписана окружность, то площадь многоугольника равна произведению его полупериметра на радиус этой окружности:** $$S = pr,$$ **где p – полупериметр многоугольника, r – радиус вписанной окружности.** *Доказательство.*
Типовая задача	*Основание равнобедренного треугольника равно 6 м, а высота, проведенная к нему, – 4 м. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.* *Доказательство.* ***Ответ***: **1,5 м.**
Полезная задача	*Докажите, что высоты треугольника и радиус вписанной в него окружности связаны соотношением:* $$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

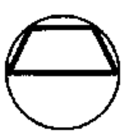
Полезная задача	*Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков, на которые точка касания вписанной окружности делит гипотенузу.*
Опорная задача ***(формула радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник)***  	**Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, вычисляется по формуле** $r = \dfrac{a + b - c}{2}$, **где** a, b **— катеты, а** c **— гипотенуза.** *Доказательство.*
Типовая задача	*Найдите катеты прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна* 13 *см, а радиус вписанной окружности –* 2 *см.* *Решение.* *Ответ*: 5 см и 12 см.

Описанная окружность

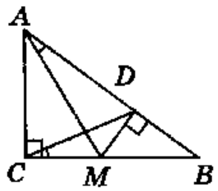
Определение окружности, описанной около многоугольника 	Окружность называется **описанной** около многоугольника, если все его вершины лежат на окружности. При этом многоугольник называется **вписанным** в окружность.
Теорема (***об окружности, описанной около треугольника***) 	**Около любого треугольника можно описать окружность, причем только одну.** **Центр описанной окружности является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.** *Доказательство.*

<table>
<tr><td>Типовая задача</td><td>Найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника с периметром $27\sqrt{3}$ см.
Решение.
Ответ: 9 см.</td></tr>
<tr><td><u>Опорная задача</u>
(об окружности, описанной около прямоугольного треугольника)
</td><td>Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы. Радиус этой окружности равен половине гипотенузы.
Доказательство.</td></tr>
<tr><td>Полезная задача</td><td>Докажите, что:
1) центр окружности, описанной около остроугольного треугольника, лежит внутри треугольника;
2) центр окружности, описанной около тупоугольного треугольника, лежит вне треугольника.</td></tr>
<tr><td>Полезная задача</td><td>Докажите, что точка, симметричная ортоцентру относительно прямой, проходящей через сторону треугольника, лежит на описанной окружности.</td></tr>
</table>

Полезная задача (теорема о трилистнике)	*Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает окружность, описанную около треугольника, в точке W. Докажите, что $AW = CW = IW$, где I – инцентр треугольника.*
<u>Теорема</u> ***(необходимое и достаточное условие вписанного четырехугольника)***  	**Если четырехугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°.** **И обратно: если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то его можно вписать в окружность.** *Доказательство.* 1. 2.
Положение центра окружности, описанной около четырехугольника 	Если существует окружность, описанная около четырехугольника, то она единственна, и ее центр лежит на пересечении серединных перпендикуляров к его сторонам.

<u>**Опорная задача**</u> **(*о параллело-грамме, вписанном в окружность*)**  	**Около параллелограмма можно описать окружность тогда и только тогда, когда он является прямоугольником. Центром окружности является точка пересечения его диагоналей.** *Доказательство.* 1. 2. <u>**Следствие**</u>. Точка пересечения диагоналей прямоугольника – единственная точка, равноудаленная от его вершин.
<u>**Следствие**</u> **(*о параллело-грамме, который является одновре-менно вписанным и описанным*)**	**Параллелограмм является вписанным и описанным тогда и только тогда, когда этот параллелограмм – квадрат. Точка пересечения диагоналей квадрата является центром его вписанной и описанной окружностей (*центром квадрата*).**
<u>**Опорная задача**</u> **(*о трапеции, вписанной в окружность*)** 	**Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда трапеция равнобедренная.** *Доказательство.*

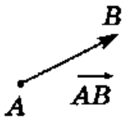
Типовая задача	***Центр окружности, описанной около трапеции, лежит на большем основании, а меньшее основание равно радиусу этой окружности r. Найдите площадь трапеции.*** ***Решение.*** *Ответ*: $\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$.
Метод вспомогательной окружности	Свойства вписанных углов и вписанных фигур могут быть применены в задачах, условия которых не связаны с окружностью. В таких задачах введение описанной

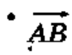
	(вспомогательной) окружности помогает установить дополнительные соотношения между элементами фигур, данных в задаче.
Типовая задача  	*Из произвольной точки M катета BC прямоугольного треугольника ABC опущен перпендикуляр MD на гипотенузу AB. Докажите, что $\angle MAD=\angle MCD$.* ***Решение.*** *Рассмотрим четырехугольник ACMD. Так как $\angle ACM=\angle ADM=90°$, то $\angle ACM+\angle ADM=180°$, и около данного четырехугольника можно описать окружность. Тогда $\angle MAD=\angle MCD$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу.*
Полезные задачи	1) *Докажите, что для равностороннего треугольника со стороной a справедливы формулы:* *а) радиуса описанной окружности* $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$; *б) радиуса вписанной окружности* $r=\frac{a}{2\sqrt{3}}$. 2) *Докажите, что для равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом a справедлива формула радиуса описанной окружности* $R=\frac{a}{\sqrt{2}}$. 3) *Докажите, что для квадрата со стороной a справедлива формула радиуса описанной окружности* $R=\frac{a}{\sqrt{2}}$.
Полезная задача	*Докажите, что квадрат высоты равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равен произведению оснований этой трапеции.*
Полезная задача (теорема Птолемея)	*Докажите, что во вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.*
Полезная задача	*Докажите, что если биссектрисы четырехугольника ABCD при пересечении образуют четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$, то четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ – вписанный.*

Дополнительные сведения и задачи по теме

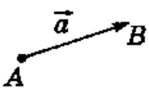
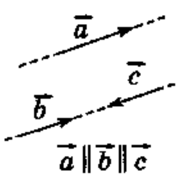
ВЕКТОРЫ

Понятие вектора

<table>
<tr><td>Определение вектора
</td><td>Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом, называется направленным отрезком или вектором.
Направление вектора определяется указанием его начала и конца. На чертеже конец вектора указывается стрелкой.

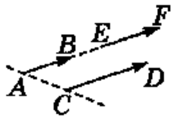
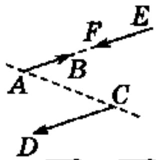
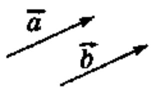
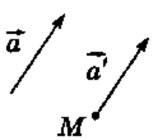
Обозначение. Данный вектор обозначается одним из следующих способов: $\vec{a}$, $\overline{a}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$, где A – начало вектора, B – конец вектора.</td></tr>
<tr><td>Определение нулевого вектора
</td><td>Вектор, у которого начало совпадает с концом (то есть любая точка плоскости), называется нулевым вектором.

Замечание. О направлении нулевого вектора не говорят.

Обозначение. Нулевой вектор – точка A – обозначается $\overrightarrow{AA}$ или $\vec{0}$.</td></tr>
<tr><td>Определение длины вектора
</td><td>Длиной (абсолютной величиной, модулем) вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Длина нулевого вектора равна нулю.
Обозначение. Длина вектора $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ обозначается одним из способов: $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$, AB или a.</td></tr>
<tr><td>Определение коллинеарных векторов
</td><td>Ненулевые векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Замечание. Очевидно, что два вектора, коллинеарные третьему, коллинеарны между собой.

Обозначение. Коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ иногда обозначается так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.</td></tr>
<tr><td>Определение сонаправленных и противоположно направленных векторов</td><td>Два ненулевых вектора называются сонаправленными (одинаково направленными), если:
1) они лежат на параллельных прямых и их концы лежат по одну сторону от прямой, проходящей через начала</td></tr>
</table>

 $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EF}$  $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{EF}$ $\overrightarrow{CD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EF}$	или 2) они лежат на одной прямой и луч этой прямой, который содержит один из векторов и имеет с ним общее начало , содержит луч, имеющий общее начало с другим вектором и содержащий его. Нулевой вектор считается сонаправленным с любым вектором. ***Обозначение.*** Сонаправленность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Если два коллинеарных вектора не сонаправлены, то они называются **противоположно направленными**. ***Обозначение.*** Противоположная направленность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. ***Замечание.*** Очевидно, что если два вектора сонаправлены (противоположно направлены) с третьим, то они сонаправлены между собой.
Определение равных векторов 	Два вектора называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны. ***Обозначение.*** Равенство векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ записывается так: $\vec{a} = \vec{b}$.
Опорная задача ***(об откладывании вектора, равного данному)*** 	**От любой точки *M* можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.** *Доказательство.*

Замечание. Равные векторы, отложенные от разных точек, часто обозначают одинаково. Иногда о таких векторах говорят, что это один и тот же вектор, но отложенный от разных точек.

Типовая задача

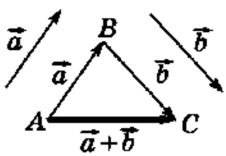
Определите вид четырехугольника ABCD, если $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$. Верно ли, что $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$? Найдите длину вектора $\overrightarrow{AC}$, если $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = 6$, $\angle ADC = 120°$.

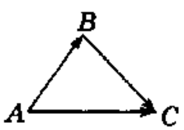
Решение.

Ответ: $6\sqrt{3}$.

Сложение и вычитание векторов

Определение суммы двух векторов (правило треугольника)





Чтобы сложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, необходимо:

1) отметить произвольную точку A;
2) отложить от точки A вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$;
3) отложить от точки B вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ называется **суммой векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Обозначение. Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} + \vec{b}$.

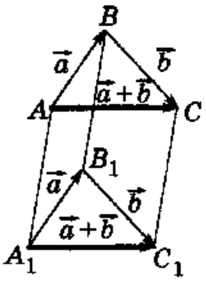
Замечания.

1) Каковы бы ни были точки A, B и C, выполняется векторное равенство:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ **(правило треугольника).**

2) Для удобства сложения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в качестве точки A часто выбирают начало вектора $\vec{a}$, а точки A, B и C не подписывают.

Опорная задача *(о сложении двух векторов по правилу треугольника)*

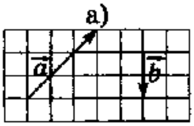


Сумма двух векторов, найденная по правилу треугольника, не зависит от выбора точки A, т. е. если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}$, то $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$.

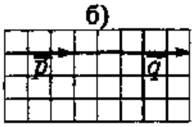
Доказательство.

Типовая задача

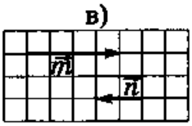
а)



б)

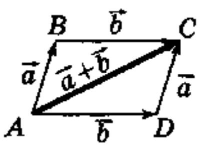


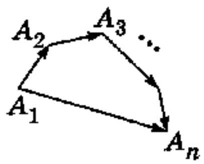
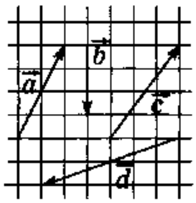
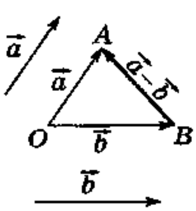
в)



Найдите сумму данных векторов.

Решение.

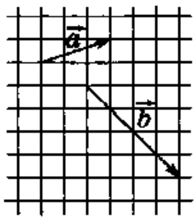
Теорема ***(законы сложения векторов)***	**Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы равенства:** **1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительный закон);** **2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (сочетательный закон);** **3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.** *Доказательство.*
Правило параллелограмма сложения векторов  	**Для векторов с общим началом их суммой является вектор, который изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах. Началом полученного вектора является общее начало данных векторов.**
Типовая задача	***В ромбе ABCD $\angle BAD=120°$. Найдите $\lvert\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\rvert$, если периметр ромба равен 48 см.*** ***Решение.*** ***Ответ*: 12 см.**

Правило многоугольника построения суммы нескольких векторов 	**Если A_1, A_2, A_3, ..., A_n – произвольные точки плоскости, то** $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+...+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$. Следствие. Для любого треугольника ABC верно векторное равенство: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.
Типовая задача 	*Найдите сумму векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$.* *Решение.*
Определение разности векторов	**Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$,** сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$: $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$. ***Обозначение***. Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a}-\vec{b}$.
Опорная задача (***правило треугольника вычитания векторов***) 	**Для векторов с общим началом их разностью является вектор, который изображается отрезком, соединяющим их концы и направленным в сторону уменьшаемого.** *Доказательство.*

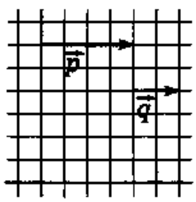
Типовая задача

Найдите разность векторов по данным рисункам.

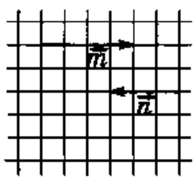
а)



б)

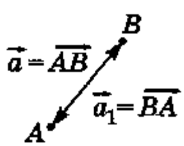


в)



Решение.

Определение противоположного вектора

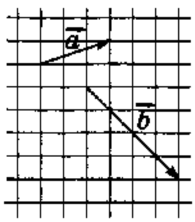


$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

Два вектора называются **противоположными**, если они противоположно направлены, а их длины равны. Вектором, противоположным нулевому вектору, считается нулевой вектор.

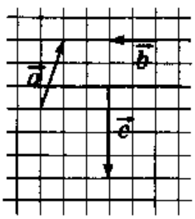
Обозначение. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$.

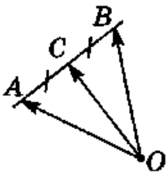
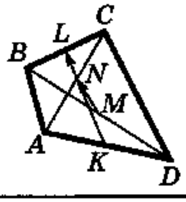
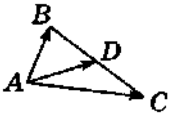
Замечание. Сумма двух векторов равна нулю тогда и только тогда, когда эти векторы противоположны: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Теорема ***(правило вычитания векторов методом сведения к сложению)***	**Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство** $$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$ *Доказательство.*
Типовая задача 	***Найдите разность данных векторов двумя способами: используя правило треугольника и правило вычитания векторов методом сведения к сложению.*** ***Решение.***
Полезная задача (неравенство треугольника для векторов)	***Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ верны неравенства:*** $\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert \le \lvert\vec{a}\rvert+\lvert\vec{b}\rvert$ ***и*** $\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert \ge \big\lvert\lvert\vec{a}\rvert-\lvert\vec{b}\rvert\big\rvert$, ***причем равенство достигается только в случае сонаправленности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.***

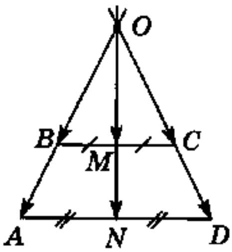
Умножение вектора на число

Определение произведения вектора на число	**Произведением** ненулевого **вектора** $\vec{a}$ **на число** k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $\lvert k\rvert\lvert\vec{a}\rvert$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k \ge 0$ и противоположно направлены при $k < 0$. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор. ***Обозначение.*** Произведение вектора $\vec{a}$ на число k обозначается так: $k\vec{a}$. ***Замечание.*** Очевидно, что для любого вектора $\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны.

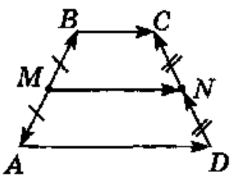
<u>Опорная задача</u> **(*свойства умножения вектора на число*)**	**Для любых чисел k, l и любых векторов $\vec{a}, \vec{b}$ справедливы равенства:** **1) $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ (сочетательный закон);** **2) $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ (первый распределительный закон);** **3) $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (второй распределительный закон);** **4) $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$;** **5) $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$.** *Доказательство.*
Типовая задача  	*Постройте вектор* $\vec{a} - 2\vec{b} + 0,5\vec{c}$. *Решение.*

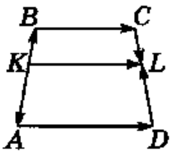
<u>**Опорная задача**</u> **(*о векторе медианы*)** 	**Пусть C – середина отрезка AB, O – произвольная точка плоскости. Тогда $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.** *Доказательство.* ***Замечание.*** **Если точка O не лежит на прямой AB, то $\overrightarrow{OC}$ – вектор медианы треугольника AOB.**
Полезная задача	*Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – медианы треугольника ΔABC, O – точка их пересечения. Докажите, что:* 1) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$; 2) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$; 3) $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = 3\overrightarrow{XO}$, *где X – произвольная точка плоскости (формула Эйлера).*
Полезная задача (о векторах, соединяющих середины сторон и середины диагоналей четырехугольника) 	*Пусть K, L, M, N – середины сторон AD, BC и диагоналей BD, AC четырехугольника $ABCD$ соответственно. Докажите, что:* 1) $\overrightarrow{KL} = \frac{\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}}{2}$; 2) $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB}}{2}$.
Полезная задача 	*Пусть точка D делит сторону BC треугольника ABC в отношении $m{:}n$, считая от вершины B. Докажите, что $\overrightarrow{AD} = \frac{n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}}{m+n}$.* *Сформулируйте и докажите обратное утверждение.*

Применение векторов к решению задач. Средняя линия трапеции

<u>Опорная задача</u> ***(о продолжении боковых сторон трапеции)*** 	**Прямая, проведенная через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения продолжений боковых сторон.** *Доказательство.*
Полезная задача	***Верно ли, что прямая, проведенная через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения ее диагоналей?***
Типовая задача	***Основания трапеции равны 20 см и 30 см, а углы при большем основании равны 75° и 15°. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.*** ***Решение.***

<table>
<tr><td></td><td>Ответ: 5 см.</td></tr>
<tr><td>Определение средней линии трапеции
</td><td>Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.

MN – средняя линия трапеции.</td></tr>
<tr><td><u>Теорема</u>
(свойство средней линии трапеции)
</td><td>Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.
Доказательство.</td></tr>
</table>

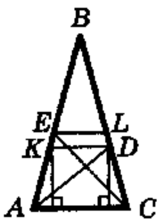
Полезная задача	***Докажите, что в трапеции с основаниями a и b (a>b) диагонали делят среднюю линию на отрезки*** $\frac{1}{2}b$; $\frac{1}{2}(a-b)$; $\frac{1}{2}b$.
Полезная задача (об отрезке, делящем боковые стороны трапеции в данном отношении) 	***Пусть точки K и L лежат на боковых сторонах AB и CD трапеции ABCD, причем*** $\frac{AK}{KB}=\frac{DL}{CL}=\frac{m}{n}$. *Докажите, что* $KL \parallel AD \parallel BC$, $KL=\frac{nAD+mBC}{m+n}$.
Типовая задача	***В прямоугольной трапеции большая боковая сторона равна $6\sqrt{2}$ см, а меньшая боковая сторона равна меньшему основанию. Найдите длину средней линии трапеции, если ее острый угол равен 45°.*** *Решение.* *Ответ*: 9 см.
Полезная задача	*Докажите, что:* 1) ***площадь любой трапеции равна произведению средней линии на высоту;*** 2) ***площадь равнобедренной трапеции с перпендикулярными диагоналями равна квадрату ее высоты.***
Полезная задача	*Пусть ABCD – равнобедренная трапеция, $AD \parallel BC$, MN – средняя линия, CE – высота. Докажите, что:* 1) $MN = AE$; 2) *AMNE – параллелограмм.*

Дополнительные сведения и задачи по теме

ПРИЛОЖЕНИЕ

Теорема Штейнера-Лемуса

Теорема (*Штейнера-Лемуса*)



Если в треугольнике две биссектрисы равны, то он равнобедренный.

Доказательство.

Пусть в треугольнике ABC $\angle A=2\alpha$, $\angle C=2\beta$, AD и CE – биссектрисы, $\angle BAD=\angle CAD=\alpha$, $\angle BCE=\angle ACE=\beta$. По условию $AD=CE=l$.

Докажем, что ΔABC – равнобедренный методом от противного.

Допустим $AB>BC$, тогда $2\beta>2\alpha$, $\beta>\alpha$. Проведем $EM\perp AC$ и $DN\perp AC$. Тогда

$$EM = CE\sin\beta,$$

$$DN = AD\sin\alpha.$$

Поскольку $\sin\beta > \sin\alpha$, а $CE = AD$, то $EM > DN$.
Проведем $EL \parallel KD \parallel AC$, тогда точка K лежит между точками A и E, а точка D – между C и L. Очевидно, что

$$EL < KD \qquad (1)$$

ΔAKD – равнобедренный, т. к. $\angle KDA = \angle DAC$, как накрест лежащие при $KD \parallel AC$ и секущей DA, а значит

$$\angle KDA=\angle KAD=\alpha,$$

и

$$KD = \frac{AD}{2\cos\alpha} = \frac{l}{2\cos\alpha}.$$

Аналогично, ΔCLE – равнобедренный, поэтому

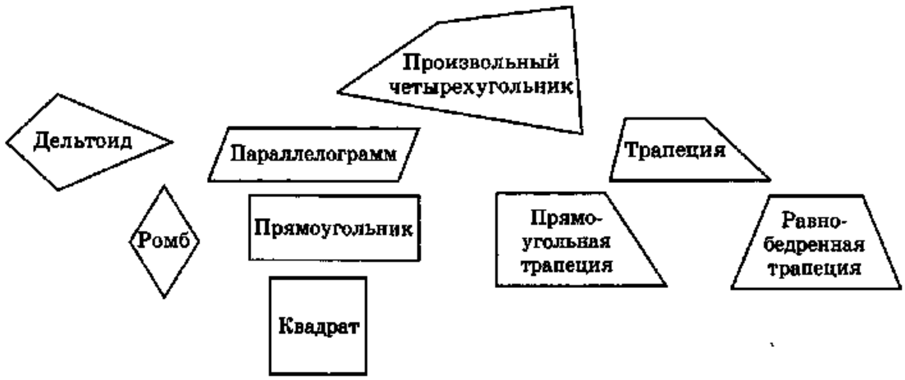
$$EL = \frac{CE}{2\cos\beta} = \frac{l}{2\cos\beta}.$$

Поскольку $\cos\alpha > \cos\beta$, то

$$KD < EL \qquad (2)$$

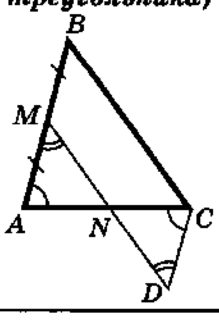
Условия (1) и (2) противоречат друг другу, следовательно $2\beta=2\alpha$, и ΔABC – равнобедренный.

Классификации четырехугольников



Теорема Фалеса и ее применение

Опорная задача
(о прямой, параллельной стороне треугольника)



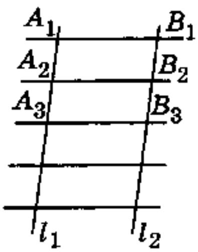
Через середину M стороны AB треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая сторону AC в точке N. Тогда $AN = NC$.

Доказательство.

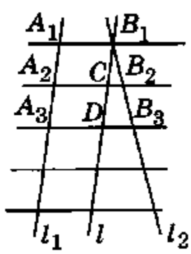
Теорема
(*Фалеса*)

Параллельные прямые, пересекающие две данные прямые и отсекающие на одной из них равные отрезки, отсекают равные отрезки и на другой прямой.

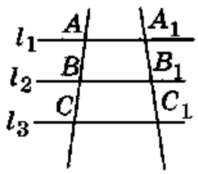
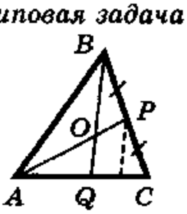
Доказательство.

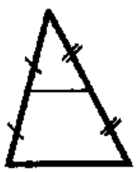


$l_1 \parallel l_2$

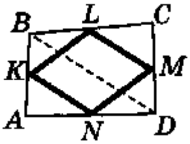


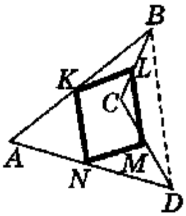
$l_1 \nparallel l_2$

Следствие  $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ $\frac{AB}{BC}=\frac{m}{n} \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{A_1B_1}{B_1C_1}=\frac{m}{n}$	**Параллельные прямые, пересекающие две данные прямые и отсекающие на одной из них отрезки, пропорциональные двум натуральным числам, отсекают на другой прямой отрезки, пропорциональные тем же числам** (см. рисунок).
Опорная задача (***о делении отрезка на равные части***)	**Любой отрезок при помощи циркуля и линейки можно разделить на *n* равных частей.** *Доказательство.*
Типовая задача  Дано: ΔABC, $PB=PC$, $\frac{AQ}{QC}=\frac{5}{3}$. Найти $AO:OP$.	*Решение.*

	Ответ: 10:3.
Определение средней линии треугольника  	**Средней линией треугольника** называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон. ***Замечание.*** В любом треугольнике можно провести три средних линии.
<u>Теорема</u> (*свойство средней линии треугольника*) 	**Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух данных сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине.** *Доказательство.*

Опорная задача (*теорема Вариньона*)

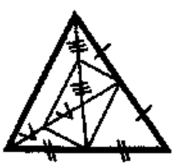


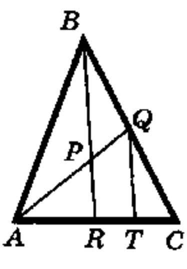


Середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Доказательство.

Теорема (*основное свойство медиан треугольника*)





Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины.

Доказательство.

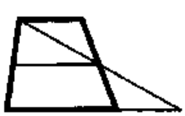
1-ый способ.

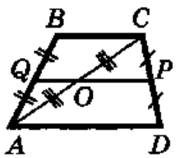
2-ой способ.

Пусть AQ и BR – медианы данного ΔABC. Проведем $QT \| BR$, $T \in AC$. Тогда по теореме Фалеса из равенства $BQ=QC$ следует, что $RT=TC$. Т.к. R – середина AC, T – середина RC, то $AR:RT=2:1$.

Тогда по следствию из теоремы Фалеса $\dfrac{AP}{PQ}=\dfrac{AR}{RT}=\dfrac{2}{1}$.

Аналогично доказывается, что любая из медиан треугольника точкой пересечения с любой другой медиа-

	ной делится в отношении 2:1, считая от вершины. Отсюда следует, что все три медианы пересекаются в одной точке.
Типовая задача	*Через точку пересечения высот равностороннего треугольника проведена прямая, параллельная одной из его сторон. Эта прямая отсекает треугольник с периметром* 16 *м. Найдите периметр исходного треугольника.* *Решение.* *Ответ*: 24 см.
Определение средней линии трапеции  	**Средней линией трапеции** называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон. MN – средняя линия трапеции.
Теорема ***(свойство средней линии трапеции)*** 	**Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.** *Доказательство.* 1-ый способ.



2-ой способ.

Пусть $ABCD$ – данная трапеция, $AD \parallel BC$, Q и P – середины сторон AB и CD соответственно, тогда QP – средняя линия $ABCD$. Пусть O – середина отрезка AC, тогда QO – средняя линия ΔBAC, OP – средняя линия ΔACD. По свойству средней линии треугольника, $QO \parallel BC \parallel AD$, $OP \parallel AD \parallel BC$, $QO = \frac{1}{2}BC$, $OP = \frac{1}{2}AD$. Т.к. через точку O можно провести единственную прямую, параллельную AD, то точки Q, O, P лежат на одной прямой и $PQ = PO + OQ = 0{,}5AD + 0{,}5BC = 0{,}5(AD + BC)$.

Типовая задача

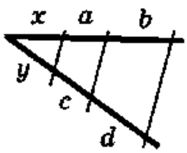
Боковые стороны трапеции разделены на три равные части, и соответствующие точки деления попарно соединены отрезками. Найдите длины этих отрезков, если основания трапеции равны 2 м и 5 м.

Решение.

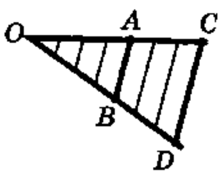
Ответ: 3 см и 4 см.

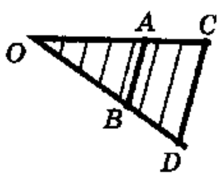
Обобщенная теорема Фалеса. Применение подобия для решения задач на построение

Теорема
(*о пропорциональных отрезках, или обобщенная теорема Фалеса*)



$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$





Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от его сторон пропорциональные отрезки.

Доказательство.

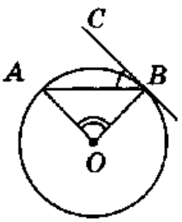
Докажем, что $OA:AC = OB:BD$.

По доказанному, $\frac{a}{x}=\frac{c}{y}, \frac{b}{x+a}=\frac{d}{y+c}$. *Разделив первое равенство на второе, получим* $\frac{a}{b}\cdot\frac{x+a}{x}=\frac{y+c}{y}\cdot\frac{c}{d}$. *Но поскольку* $\frac{a}{x}=\frac{c}{y}$, *то* $\frac{a}{x}+1=\frac{c}{y}+1$, *то есть* $\frac{x+a}{x}=\frac{y+c}{y}$, *поэтому* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Опорная задача ***(о построении четвертого пропорционального отрезка)***	**Даны отрезки *a*, *b*, *c*. Постройте отрезок** $x = \frac{bc}{a}$. *Решение.* ***Замечание.*** Построенный отрезок x называется четвертым пропорциональным, т. к. он является четвертым членом пропорции $a : b = c : x$.
Метод подобия	При решении некоторых задач для построения треугольников используется ***метод подобия.*** Он состоит в том, что сначала строят треугольник, подобный искомому, а затем по данным задачи строят искомый треугольник.
Типовая задача	*Постройте треугольник по двум углам и медиане, проведенной из вершины третьего угла.* *Решение.*

Углы между хордами и касательными

<u>Опорная задача</u>
(об угле между хордой и касательной)

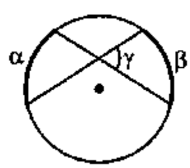


$$\angle CBA = \frac{1}{2}\angle AOB$$

Острый угол между хордой и касательной к окружности, проведенной через конец хорды, равен половине центрального угла, стягиваемого данной хордой (или половине меньшей дуги, стягиваемой хордой).

Доказательство.

<u>Опорная задача</u>
(об угле между пересекающимися хордами)

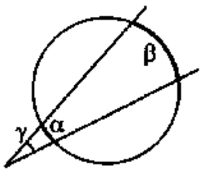


$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Угол между пересекающимися хордами равен полусумме градусных мер двух дуг окружности, заключенных внутри данного угла и внутри угла, вертикального с данным.

Доказательство.

Опорная задача
(об угле между секущими)

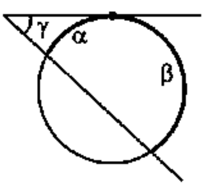


$$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Угол между двумя секущими, пересекающимися вне окружности, измеряется полуразностью большей и меньшей дуг, заключенных между сторонами угла.

Доказательство.

Опорная задача
(об угле между касательной и секущей)



$$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Угол между касательной и секущей, проведенными из одной точки вне окружности, измеряется полуразностью большей и меньшей дуг, заключенных между сторонами угла.

Доказательство.

СОДЕРЖАНИЕ

Ершова Алла Петровна
Голобородько Вадим Владимирович
Крижановский Александр Феликсович

Тетрадь-конспект по геометрии
для 8 класса

Оформление обложки *А.А. Андреев*
Ответственный за выпуск *К.П. Бондаренко*
Компьютерная верстка *С.И. Удалов*

Подписано в печать 25.08.2014. Формат 70×90/16.
Усл.-печ. л. 9,36. Тираж 3000 экз. Заказ № ВЗК-04354-14.

Ю «Илекса», 107023, г. Москва, ул. Буженинова, д. 30, стр. 4,
сайт: www.ilexa.ru, E-mail: real@ilexa.ru,
телефон: 8(495) 964-35-67

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»,
филиал «Дом печати – ВЯТКА» в полном соответствии
с качеством предоставленных материалов.
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.
Факс: (8332) 53-53-80, 62-10-36;
http://www.gipp.kirov.ru; e-mail: order@gipp.kirov.ru